SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE MARABÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS HUMANAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO DO CAMPO
CURSO DE LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO DO CAMPO

ELINE ARAÚJO SANTOS

O USO DO ALGORITMO SIMPLEX NA OTIMIZAÇÃO DE RENDIMENTOS NA PRODUÇÃO DE QUEIJO: Teoria e Aplicação em Modelagem Matemática

MARABÁ-PA

2018

ELINE ARAÚJO SANTOS VIEIRA

O USO DO ALGORITMO SIMPLEX NA OTIMIZAÇÃO DE RENDIMENTOS NA PRODUÇÃO DE QUEIJO: Teoria e Aplicação em Modelagem Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Educação do Campo com habilitação em Matemática na Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará.

Orientador: Prof. Me. Marcos Guilherme Moura

MARABÁ-PA

2018

ELINE ARAÚJO SANTOS VIEIRA

O USO DO ALGORITMO SIMPLEX NA OTIMIZAÇÃO DE RENDIMENTOS NA PRODUÇÃO DE QUEIJO: Teoria e Aplicação em Modelagem Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Educação do Campo com habilitação em Matemática na Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará.

Orientador: Prof. Me. Marcos Guilherme Moura

Defesa pública em: ___/____/_______

Conceito: ____________________

Banca Examinadora:

____

Prof. Me. Marcos Guilherme Moura Silva (ORIENTADOR)

____

Prof. Dr. Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior- ICH/UNIFESSPA

____

Prof. Me. José Sávio Bicho de Oliveira- ICH/UNIFESSPA

____

Prof. Dr. Carlos Alberto Gaia Assunção- ICH/UNIFESSPA

MARABÁ-PA

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Setorial Josineide da Silva Tavares

Vieira, Eline Araújo Santos

O uso do algoritmo simplex na otimização de rendimentos na produção de queijo: teoria e aplicação em modelagem matemática / Eline Araújo Santos Vieira ; orientador, Marcos Guilherme Moura. — Marabá : [s. n.], 2018.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Campus Universitário de Marabá, Instituto de Ciências Humanas, Faculdade de Educação do Campo, Curso de Licenciatura em Educação do Campo, Marabá, 2018.

1. Programação Linear. 2. Algoritmos. 3. Modelos matemáticos. 4. Queijo - Fabricação. I. Moura, Marcos Guilherme, orient. II. Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará. III. Título.

CDD: 22. ed.: 519.72

Elaborada por Miriam Alves de Oliveira – CRB-2/583

Dedico,

Aos meus filhos, Paulo Henrique e Eduardo, que me fizeram conhecer o real significado do amor incondicional.

À minha mãe, Roseania, por todo o apoio e ajuda durante todos esses anos, inclusive ajudando a cuidar dos meus pequeninos enquanto estive ausente.

Ao meu pai, Jhonatan, que desde a minha infância, confiou em meu potencial e sempre me ajudou das mais diversas maneiras possíveis.

Aos meus irmãos, Elany, Wanderson, Samara e Beatriz, por todo apoio e pela torcida.

AGRADECIMENTOS

Durante essa longa jornada de 04 anos de muitos aprendizados, que me fez mudar significativamente a maneira de ver e pensar o mundo pude contar com o apoio de diversas pessoas, assim sendo gostaria de agradecer, em especial:

À Deus, pela vida e pelas oportunidades proporcionadas.

Ao Curso de Licenciatura em Educação do Campo pela formação e as pessoas com as quais convivi nesses espaços ao longo desses anos.

À todo o corpo docente da Faculdade de Educação do campo, pelas contribuições para minha formação e pelas reflexões que me propiciou neste período sobre meu futuro papel como educadora.

Ao meu professor e orientador, Marcos Guilherme, pela excelente orientação, apoio e pela fé em mim depositada.

Ao Programa de Educação Tutorial – PET, e à todos os integrantes do grupo, em especial minha querida tutora, prof. Dr. Paola Giraldo Herrera, por todos os aprendizados e ensinamentos compartilhados.

Às minhas amigas, Ariane, Érica e Samylla Cybelly, pela cumplicidade, amizade, apoio, ajuda e confiança.

E por fim, à todos aqueles que de alguma forma estiveram e/ou estão próximos de mim contribuindo de alguma forma.

"A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo".

(Albert Einstein)

SUMÁRIO

RESUMO

A Modelagem Matemática pode ser compreendida como um *método científico de pesquisa* e tem como objetivo interpretar e compreender os mais diversos fenômenos do nosso cotidiano. A Programação Linear, por sua vez, é um ramo da Pesquisa Operacional (P.O.) e tem sido amplamente utilizada em vários setores da indústria e do comércio. Com o intuito de desenvolver e aplicar esses conceitos, escolheu-se um laticínio localizado na Vila Ubá, município de São João do Araguaia, tendo por objetivo obter um modelo matemático que otimize a fabricação de queijo, maximizando os rendimentos. Os caminhos metodológicos para a obtenção do modelo seguiram o processo de Modelagem Matemática: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação. Para a construção do modelo, escolheu-se quatro variáveis de decisão a partir da produção de queijo do laticínio: Muçarela (X_1), Prato (X_2), Coalho (X_3) e Parmesão (X_4), e restrições baseadas nas limitações físicas, industriais e comerciais do estabelecimento, como: a quantidade de leite, a capacidade de processamentos dos equipamentos e as demandas de mercado. O modelo obtido superou os rendimentos médios diários do laticínio inicialmente investigado (48.005,50), definindo um rendimento máximo diário de R$ 50.051,125 (em valores brutos), sujeito a uma quantidade máxima de 1650 quilos de queijo Muçarela, 495 quilos Prato, 615,75 quilos Coalho e 495 quilos de Parmesão.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática; Algoritmo simplex; Produção de queijo

ABSTRACT

Mathematical Modeling can be understood as a scientific method of research and aims to interpret and understand the most diverse phenomena of our daily life. Linear Programming, in turn, is a branch of Operational Research (P.O.) and has been widely used in various sectors of industry and commerce. In order to develop and apply these concepts, we chose a dairy located in Vila Ubá, in the municipality of São João do Araguaia, aiming to obtain a mathematical model that optimizes cheesemaking, maximizing yields. The methodological paths to obtain the model followed the process of Mathematical Modeling, namely: experimentation, abstraction, resolution, validation and modification. For the construction of the model, four decision variables were chosen, considering the production of the four types of dairy cheese: Muçarela (X1), Prato (X2), Crop (X3) and Parmesão (X4) industrial and commercial establishments, such as: the quantity of milk, the processing capacity of the equipment and the market demands. The model obtained surpassed the average daily yield of the dairy initially investigated (48,005,50), defining a daily maximum yield of R $ 50.051,125 (gross), subject to a maximum quantity of 1650 kg of Muçarela cheese, 495 kg Prato , 615.75 kg Rennet and 495 kg of Parmesan.

Keywords: Mathematical Modeling; Simplex Algorithm; Cheese Production

CAPÍTULO 1 – MODELAGEM MATEMÁTICA

1.1 Pressupostos Teóricos da Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática representa um processo dinâmico que consiste na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos, que podem ser interpretadas em linguagem usual, permitindo prever tendências e tomada de decisões (BASSANEZI, 2002).

Assumimos nesse trabalho a perspectiva de Modelagem Matemática fundamentada principalmente em Bassanezi (2002), que a concebe “tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem” (p. 16). Em nosso caso específico, não nos preocuparemos com aplicações didáticas em sala de aula, mas com seu uso metodológico-científico, que permitirá ler uma realidade social e econômica que tomamos como lócus empírico desse estudo.

De todo modo, visando ampliarmos os horizontes teóricos aqui delineados, trazemos para o debate, autores que dissertam acerca do uso da Modelagem Matemática em Sala de aula, visando estabelecermos referências para futuros trabalhos nessa perspectiva.

A Modelagem Matemática na educação brasileira surgiu em meados da década de 70, praticamente ao mesmo tempo em que surgiu nos Estados Unidos e Europa, através de um movimento realizado por Aristides C. Barreto, Ubiratan D’ Ambrósio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, (BIEMBENGUT, 2009, p.08); por outro lado, considerando que a matemática surgiu justamente com o intuito de resolver problemas da realidade, pode-se assegurar que o processo de Modelagem Matemática foi exercitado desde o começo da história da matemática.

Conforme Biembengut e Hein (2003, p. 08), “a modelagem é tão antiga quanto a própria matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos”, todavia, mesmo sendo empregada desde a antiguidade, somente na atualidade a modelagem vem sendo utilizada no campo da matemática como método auxiliar em diversas áreas do conhecimento para análise de fatos existentes na realidade e também como método alternativo de ensino.

De acordo com Bassanezi, “a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2002, p.16), e busca elaborar modelos que descrevam matematicamente situações reais do cotidiano, propondo soluções para problemas não-matemáticos procedentes de outras áreas. Enquanto que para Mendonça (1998, p. 36 apud 1993 Scheffer e Campagnollo) a Modelagem Matemática é vista:

> como um processo de sentido global que tem início numa situação real problematizada onde se procura a solução através de um modelo matemático que traduzirá, em linguagem matemática, as relações naturais do problema de origem buscando a validação ou não do modelo com dados reais.

É importante ressaltar que é cabível exteriorizar a dimensão sócio-crítica da Modelagem Matemática, trazendo situações que possibilite o debate sobre temas acerca da natureza e a função dos modelos matemáticos na sociedade, afinal, de acordo com Barbosa:

> As atividades de Modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem matemática nem Modelagem são “fins”, mas sim “meios” para questionar a realidade vivida. Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a matemática no mundo social, mas que Modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica. (BARBOSA, 2001, p. 04)

A partir da afirmativa de Barbosa, é possível perceber que o extraordinário da Modelagem Matemática não se encontra no fato de construir modelos matemáticos e observar a sua aplicabilidade em problemas do cotidiano, bem como não está no fato de ensinar Matemática por meio de situações que envolvam outras áreas do conhecimento, pois o mais importante é saber utilizar a Matemática como uma ferramenta que objetiva acabar com as incertezas relacionadas com determinado problema de uma determinada realidade.

Na perspectiva de Burak (1992) é importante lembrar que a matemática que constitui o modelo deve ser autoconsciente e obedecer à todas as leis usuais da lógica matemática. O referido autor afirma ainda que a Modelagem Matemática “se constitui em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões (BURAK, 1992, p. 62).

Para Biembengut “cada sensação ou percepção, que se tem do meio, faz gerar na mente imaginação e ideias, que a partir da compreensão e do entendimento, podem transformar-se em significado”. Esse significado gera conhecimento, e a partir desse conhecimento, surgem conceitos e imagens que dão sentido ao mundo em que vivemos, ou seja, nos ajuda a compreender e representar por meio de modelos o meio em que estamos inseridos. (BIEMBENGUT, 2009, p.18 *apud* BIEMBENGUT, 2007a).

Essa representação pode ser interna ou externa. As representações internas são aquelas que se constroem no sistema cognitivo, ou seja, apenas como um processo mental, para a compreensão do ambiente em que se vive, bem como, uma forma de sobrevivência. As representações externas são as que se pode exteriorizar, assim como os modelos matemáticos.

Denominaremos de Modelo Matemático, o conjunto de símbolos e relações matemáticas que representem de alguma forma o fenômeno estudado, que pode estar vinculado a uma teoria geral existente (modelo teórico), ou representando algum objeto ou fato concreto (Modelo objeto). Segundo Bassanezi, modelos matemáticos podem ser classificados de acordo com o tipo de matemática utilizada:

1) Linear ou não linear: se as equações básicas que o comporem tiverem essas características;
2) Estático ou dinâmico: quando representa a forma de objetos ou suas variações;
3) Educacional: quando é baseado em pequenas suposições que servem para buscar variáveis e soluções, quase sempre soluções analíticas;
4) Estocástico ou Determinístico: a depender do uso de fatores aleatórios nas equações utilizadas;

Para a construção de um modelo se faz necessário conhecer a existência de problemas legítimos, num dado contexto e que venham a se constituir como significativos para estes sujeitos e suas respectivas comunidades.

Segundo Bassanezi (2002, p. 26) para desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática é necessário que haja uma organização de uma série de ações, tais como:

1. Experimentação: consiste em promover a obtenção dos dados.

2. Abstração: consiste em formular o modelo**,** através da seleção de variáveis, da problematização, da formulação de hipóteses e, é também a etapa do processo em que a situação-problema é descrita e interpretada como um problema matemático. E posteriormente, a simplificação**.**

3. Resolução: consiste em uma atividade propriamente matemática, utilizando métodos matemáticos e/ou computacionais, objetivando uma solução através da própria matemática.

4. Validação: consiste em analisar o modelo, bem como comparar com os dados empíricos, as soluções e hipóteses, a fim de decidir se este modelo será aceito ou não.

5. Modificação: caso o modelo não seja aceito, se faz necessário checar informações originais, hipóteses, variáveis e o próprio desenvolvimento de cálculo matemático, e então realizar as devidas modificações, ou seja, é preciso que se refaça todo o processo. É importante ressaltar que todos os modelos são passiveis de mudanças, e que essas reformulações são de extrema importância para o processo de Modelagem Matemática. Por fim, pode-se então fazer a aplicação do modelo, a fim de prever, decidir, ilustrar e/ou entender a situação real.

A figura (1) a seguir ilustra o processo de Modelagem Matemática proposto por Bassanezi (2002, p. 27)

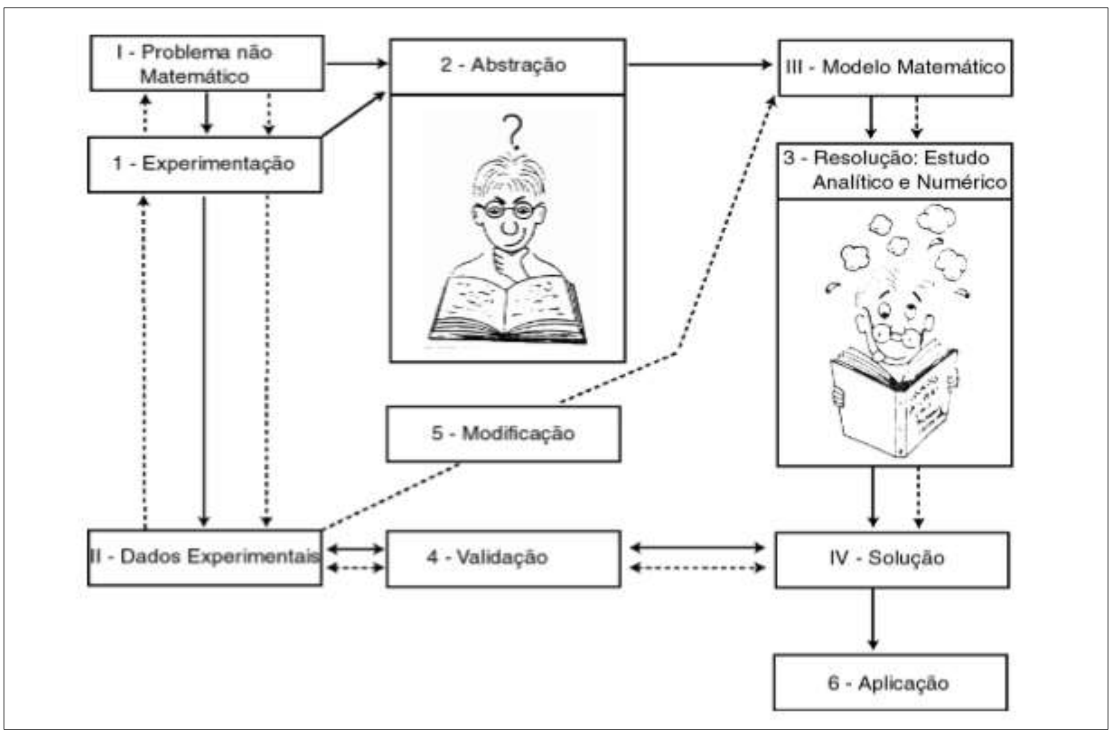


Figura 1- Processo de Modelagem Matemática segundo Bassanezi (2002). Setas contínuas representam as primeiras aproximações. As setas pontilhadas indicam a dinâmica advinda da busca por um modelo coerente com o problema estudado.

A figura acima simula o esquema proposto por Bassanezi (2002) representando as fases da Modelagem Matemática, de forma que, as setas contínuas significam a primeira aproximação em relação às hipóteses realizadas sobre a situação a ser estudada, as setas pontilhadas, significam à busca do modelo matemático que corresponda a solução a esta situação.

Biembegutt e Hein (2000, p. 13 – 15), por sua vez, propõem que o processo de obtenção de um modelo seja realizado em três fases, subdivididas em seis subfases (conforme figura 2). São elas:

1ª fase: Interação com o assunto

Nesta fase o tema a ser estudado será esboçado, para isso, deverão ser realizadas pesquisas em livros ou revistas especializadas. Esta fase se divide em duas subfases:

- Reconhecimento da situação problema;
- Familiarização com o assunto a ser modelado.

2ª fase: Matematização

A segunda fase é caraterizada pela tradução da situação problema para a linguagem matemática. Isto é, formular o problema de forma que possa ser resolvido matematicamente. Em uma perspectiva didática, matematizar é explorar contextos de modo a compreende-los/organiza-los matematicamente.

- Formulação de problema;
- Resolução do problema.

3ª fase: Modelo matemático

A terceira e última fase consiste na interpretação da solução a qual deve ser realizada a partir da análise das implicações da solução, proveniente do modelo que está sendo construído e na validação do modelo, fazendo testes e verificando qual o grau de aproximação da situação real.

- Interpretação da solução;

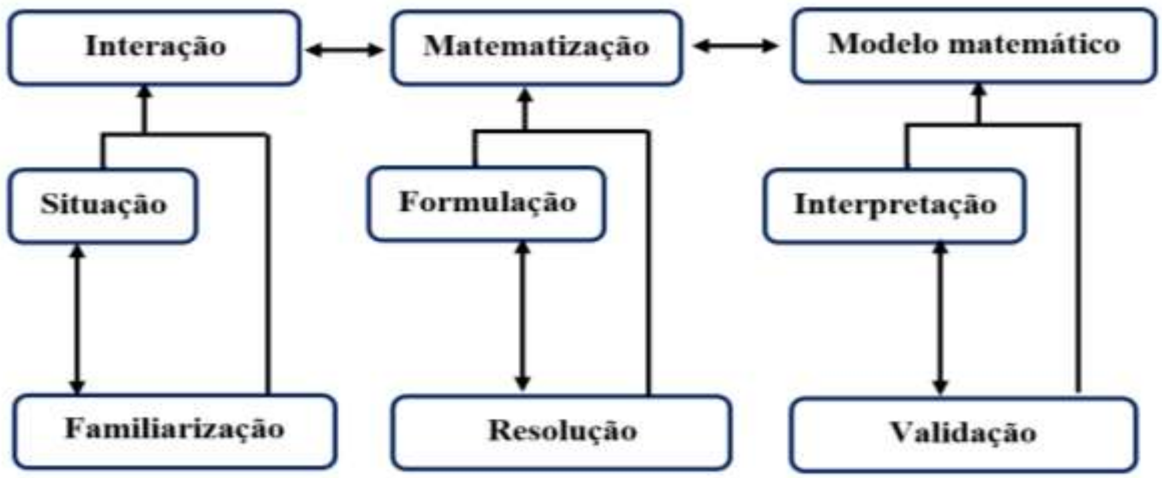


Figura 2- Processo de Modelagem segundo Biembegutt e Hein (2000)

Algumas experiências correlacionadas a implementação da Modelagem Matemática vêm sendo desenvolvidas ao longo dos anos, considerando contextos de sala de aula; A exemplo disso, o trabalho desenvolvido por Scheffer e Campagnollo (1998), que objetivou propor alternativas para o ensino de matemática no meio rural. O referido estudo consistiu em investigar as capacidades de armazenamento e transporte de produtos agrícolas que posteriormente foram utilizados no ensino de geometria para efetuar cálculos de área e de volume. Experiências fora da sala de aula também vem sendo implementadas, como por exemplo, um estudo sobre crescimento em peso do tambaqui com modelagem fuzzy realizado por Bassanezi (2015), que baseou-se no modelo de Von Bertalanff y generalizado, determinando o parâmetro de alometria através de um ajuste de curva que relaciona a idade do peixe com o seu peso.

1.2 Modelagem Matemática como método de ensino

A Modelagem Matemática como estratégia de ensino tem forte influência teórica de princípios da Matemática Aplicada. Em se tratando do uso de modelagem como método educativo, Bassanezi (2002) elenca cinco razões para utiliza-la, são elas: a motivação, a facilitação da aprendizagem, a preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática. Visto que atualmente nas escolas o ensino de matemática se dá através de um processo inverso do que deveria ser feito, pois trazem primeiro os enunciados prontos, depois demonstram como se deve proceder para que se chegue ao resultado, e por último, revelam qual a aplicação do algoritmo utilizado, o ideal seria que os alunos formulassem e validassem hipóteses, e posteriormente, construísse um enunciado.

Por outro lado, sabe-se que algumas dificuldades são impostas para a inclusão da modelagem durante as aulas de matemática, visto que este método é uma alternativa ao método tradicional. A principal dificuldade para a inclusão deste método é que para a construção de um modelo é necessário que haja bastante tempo disponível para desenvolver todas as fases do processo de modelagem. Segundo Barbosa, há outro impasse para a inserção da modelagem no ensino de matemática que é dado pela:

> (...) distância entre a maneira que o ensino tradicional enfoca problemas de outras áreas e a Modelagem. São atividades de natureza diferente, o que nos leva a pensar que a transição em relação à Modelagem não é algo tão simples. Envolve o abandono de posturas e conhecimentos oferecidos pela socialização docente e discente e a adoção de outros. Do ponto de vista curricular, não é de se esperar que esta mudança ocorra instantaneamente a partir da percepção da plausibilidade da Modelagem no ensino, sob pena de ser abortada no processo. (BARBOSA, 2001, p. 08)

O ensino da matemática de forma tradicional e a Modelagem Matemática consistem em exercícios de caráter diferentes, e é por este motivo que para inserir a Modelagem como alternativa ao método tradicional não é simples, visto que medidas como a renúncia de atitudes, práticas e conhecimentos ofertados pelo professor e a utilização de outras práticas se fazem necessárias, até mesmo o currículo escolar precisaria ser revisado, para então estabelecer uma adaptação expandindo os espaços para as atividades de investigação matemática.

Por outro lado, as próprias Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio afirmam que, objetiva-se “que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano” (BRASIL, 2006, p. 69), e através da Modelagem Matemática esse objetivo é atingido com eficiência, uma vez que, “só se aprende modelagem, modelando” (BASSANEZI, 2002, p. 43).

1.3 As distintas concepções relativas a Modelagem Matemática no ensino

De acordo com Barbosa (2001, p. 03 apud Kaiser Messmer 1991) as discussões internacionais sobre Modelagem destacam duas visões conceptivas: a pragmática e a científica.

A corrente pragmática afirma que o currículo deve ser organizado de forma a remover todos os conteúdos matemáticos que não tem aplicação em áreas não-matemáticas. Ou seja, deve ser ensinado apenas os conteúdos que tem aplicação prática no cotidiano, e então trabalhar somente a partir da construção de modelos matemáticos. Desta forma, os trabalhos construídos a partir dessa corrente demonstram preocupações apenas com a aplicabilidade da matemática em situações reais.

A corrente científica busca criar analogias com outras áreas a partir da matemática, pois considera a matemática e seu arcabouço como um guia indispensável para ensinar matemática, dessa forma, a modelagem, para os seguidores da corrente científica, é utilizada como um método de inserir novas concepções.

O importante é que a Modelagem Matemática seja entendida como estratégia de ensino e aprendizagem que implica em pesquisa sobre os mais diversos temas, desde que tenham origens na realidade, o que sugere a possibilidade de considerar conteúdos e anseios interdisciplinares. Corroborando com o que foi apresentado no texto da Biembengut (2009, p. 18 apud BLUM et al, 2004) o qual afirma que se deve:

> (...) considerar que a modelagem emerge como estratégia para motivar estudantes, nos mais diversos níveis de escolaridade, a aprender matemática e se consolida como método não apenas para motivá-los a aprender matemática, mas principalmente, propiciar a eles a capacidade de realizarem, fora da sala de aula, modelagem e aplicações em outras áreas de conhecimento e diferentes contextos; isto é, resolver problemas, tomar decisão, ter senso crítico e criativo.

De maneira análoga a Modelagem Matemática como método educativo consiste em um método que visa promover uma aprendizagem onde os alunos são motivados a questionar, problematizar e analisar, matematicamente, uma determinada realidade.

1.4. Onde estamos situados?

Na perspectiva adotada, faremos uso da Modelagem como método de pesquisa, que investigará a possibilidade matemática de maximização de lucro sobre a produção de queijo em determinado laticínio, localizado na microrregião de Marabá. O modelo, conforme nossos enunciados teóricos, será do tipo linear, pois faremos uso de problemas de PL (Programação Linear), pautados no Método Simplex, que necessariamente fazem uso de equações/inequações lineares.

Nosso objetivo, além de construir o modelo e alcançar um resultado ótimo de comercialização, é contribuir com o pequeno e médio produtor rural, a partir dos conhecimentos matemáticos, que os ajude na tomada de decisões no que concerne as suas atividades laborais e comerciais.

No próximo capítulo, discutimos aspectos conceituais sobre o que são problemas lineares e apresentamos o Método Simplex, que será nosso modelo teórico de análise.

CAPÍTULO 2 – PROGRAMAÇÃO LINEAR

2.1 Breve histórico da Programação Linear

A Programação Linear (PL) é um campo da Pesquisa Operacional (P.O) que serve para dar apoio à decisão estando diretamente ligada ao planejamento para alocação de recursos limitados; Dessa forma, a Programação Linear pode ser caracterizada como uma técnica de otimização que surgiu durante a segunda guerra mundial, porém, após o fim dessa guerra, tem sido utilizada em segmentos industriais e comerciais.

Na perspectiva de Boldrine et al (1980) “um problema de otimização envolve maximizar ou minimizar uma função restrita a certas condições” (p. 350). Dessa forma a Programação Linear oferece bases para que se realize a melhor escolha a fim de atingir determinado objetivo através da alocação ótima dos recursos.

O problema de otimizar uma função linear sujeita a restrições teve origem com os estudos de Fourier sobre sistemas lineares de inequações em 1826. Mais tarde, em 1839 o Matemático russo, Leonid Kantorovich, apresentou o método matemático de Programação Linear aplicável a maximizar a eficácia das variáveis econômicas, bem como a produtividade, matérias-primas e mão de obra, e em 1928, John Von Neumann publicou a obra "Teoria dos Jogos”, esta, por sua vez, forneceu fundamentos matemáticos da Programação Linear.

De acordo com Melo (2012, p 7) “as teorias de Leonid Kantorovich foram usadas para melhorar o planeamento econômico e alocação de recursos na União Soviética”. No entanto, o ápice da Programação Linear se deu em 1940, através dos estudos de George Dantzig, o qual não só formulou problemas de Programação Linear, como também inventou o Algoritmo do Simplex em 1947 para a Força Aérea Americana enquanto trabalhava na Rand Corporation (Research and Development) no projeto SCOOP (Scientific Computation of Optimun Programs), algoritmo este, capaz de resolver qualquer situação problema de Programação Linear, a fim de criar estratégias de otimização para problemas militares.

Entre os anos de 1950 a 1965 houve uma dedicação maior para a criação de algoritmos para solucionar problemas de Programação Linear em rede. Dessa forma, foram desenvolvidos dois algoritmos e que podem ser classificados em duas classes, a especialização do Método Simplex e o Método Primal-Dual.

Com efeito, a Programação Linear pode ser utilizada em diversas áreas, dando apoio a decisão, podendo ser empregada no planejamento logístico de frotas e rotas, planejamento da produção de longo, médio e curto prazo, decisão em definição de mix de produtos, estratégias operacionais em agricultura, instalação de fábricas ou centros de distribuição, dentre outros contextos.

2.2 Problemas de Programação Linear

A resolução de Problemas de Programação Linear incide em maximizar ou minimizar uma função objetivo, esta, por sua vez, é uma função matemática que determina o valor almejado ou a qualidade da solução, em função das variáveis de decisão.

As restrições são sobrepostas ao modelo a fim de considerar as limitações físicas do sistema, uma vez que, afetam diretamente os valores das variáveis de decisão, composto por um sistema linear de equações ou inequações, visto que esses problemas, geralmente, tratam de recursos limitados e o objetivo é maximizar o lucro. As restrições garantem que essas soluções estão de acordo com os limites técnicos impostas pelo sistema.

A representação da formulação de um modelo geral de Programação Linear pode ser dada da seguinte forma:

Minimizar ou Maximizar $Z = c_1x_1 + c_1x_2 + ... + c_nx_n$

satisfazendo as restrições: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m$$

onde:

- Z é a função objetivo;
- c_j é o coeficiente da j-ésima variável da função objetivo, (j = 1, 2, ..., n);
- As restrições podem vir acompanhadas também pelos sinais ≤ ou =, dependendo, é claro, da situação problema;
- X_j são as variáveis de decisão, portanto, devem ser maiores ou iguais a zero ($x_j \geq 0$, j=1, 2, ... n);
- a_{ij} é o coeficiente das i-ésima restrição da j-ésima variável (i = 1, 2, ..., m, j=1, 2, ..., n);
- b_i é a quantidade de recursos disponíveis da i-ésima restrição, (i = 1, 2, ..., m);

2.2.1 Exemplos de problemas de Programação Linear

Para melhor elucidar os conceitos discutidos na sessão anterior, apresentaremos dois exemplos[1] que se encaixam nas características de problemas de programação linear:

Exemplo 01- Uma indústria produz 2 produtos, I e II, sendo que cada produto consome um certo número de horas em 3 máquinas A, B e C para ser produzido, conforme a tabela:

Produto	Tempo Maquina A	Tempo Maquina B	Tempo Maquina C
I	2	1	4
II	2	2	2

O tempo de funcionamento máximo disponível das máquinas é:

Máquina	Máximo tempo disponível
A	160h
B	120h
C	280h

O lucro obtido por cada produto I é R$1,00 e por cada produto II é R$1,50. Quanto deverá ser fabricado de cada produto de modo que seja obedecida a capacidade operativa das máquinas com o maior lucro possível?

Formalizando o problema:

Sejam X_1 *e* X_2 as variáveis de decisão, respectivamente, os produtos I e II; e Z o lucro total da empresa a partir da produção. Obtém-se a seguinte função objetivo:

$$Z = X_1 + 1{,}5X_2$$

e considerando as restrições impostas pela disponibilidade de tempo das máquinas, temos:

maximizar $Z = X_1 + 1{,}5X_2$

sujeito à $2X_1 + 2X_2 \leq 160$

$X_1 + 2X_2 \leq 120$

$4X_1 + 2X_2 \leq 280$

[1] Exemplo 1 extraído de uma lista de exercício, disponível em: http://www.ufjf.br/epd015/files/2010/06/programacao_linear3.pdf e Exemplo 2 extraído de uma lista de exercício, disponível em: www.ime.unicamp.br/~moretti/LE901/Problemas_de_Modelagem.pdf

Exemplo 02 - Uma construtora possui um terreno de 9900 m^2 onde pretende construir um conjunto de casas. As casas a serem construídas nesse terreno são de 3 tipos: Tipos I, II e III. Sabe-se que:

- Cada casa de tipo I ocupa 170m^2 e permite obter um lucro de R$ 3000,00
- Cada casa do tipo II ocupa 120m^2 e permite obter um lucro de R$ 2000,00
- Cada casa do tipo III ocupa 70 m^2 e permite obter um lucro de R$ 1000,00

A empresa sabe que o projeto de urbanização será aprovado somente se:

- A área ocupada pelas casas dos tipos I e II não for superior a 5100 m^2;
- Forem construídas pelo menos 20 casas do tipo III.

Sabendo que a empresa deve reservar pelo menos 2000m^2 para jardins, vias e apartamentos (esses custos de construção serão suportados pela prefeitura Municipal) e que o estudo de mercado efetuado mostra que todas as casas construídas serão vendidas. Quantas casas de cada tipo devem ser construídas para que se obtenha lucro máximo?

Formalizando o problema

Sejam X_1, X_2 e X_3 as variáveis de decisão, respectivamente, os tipos I, II, E III das casas; e Z o lucro total da empresa a partir da construção dessas casas no terreno. Obtém-se a seguinte função objetivo:

$Z = 3000\, x_1 + 2000\, x_2 + 1000\, x_3$

E considerando as restrições de limitação de área. Temos:

Maximizar $Z = 3000\, x_1 + 2000\, x_2 + 1000\, x_3$

Sujeito à: $x_1 + x_2 \leq 5.100$

$x_3 \geq 20$

$170\, x_1 + 120\, x_2 + 70\, x_3 \leq 7.900$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2.3 Método Gráfico de Problemas PL

O Método Gráfico é uma das técnicas utilizadas para determinar a solução de problemas de Programação Linear, porém limita-se a resolver problemas que contenham apenas duas ou três variáveis, uma vez que que não é possível ilustrar graficamente mais de 3 dimensões.

Esse método consiste, basicamente, em representar o conjunto das possíveis soluções do problema, através de um sistema de eixos ortogonais, de forma que leve em consideração as restrições impostas pelo problema, permitindo uma resolução de problemas simples de Programação Linear de forma intuitiva e visual. A representação gráfica de uma equação linear com duas variáveis é dada por uma reta. E a representação gráfica de uma inequação linear com duas variáveis é um dos semiplanos definidos pela reta dada pela representação da equação.

O processo de resolução através desse método segue os seguintes passos:

Passo 01 - Delinear um plano cartesiano em que cada variável de decisão seja representada por um eixo.

Passo 02 - Estabelecer uma escala de medida para cada um destes eixos adequada à variável associada.

Passo 03 - Traçar as coordenadas de restrições do problema, incluindo as não-negativas. Vale ressaltar que, uma desigualdade define uma região que será o semi-plana limitada pela linha reta obtida ao ponderar a restrição como uma igualdade, enquanto que uma equação define uma região que é a própria linha reta.

Passo 04 - A intersecção de todas as regiões configura o espaço de soluções viáveis, também denominado por conjunto convexo. Caso esta região seja vazia, não haverá nenhum ponto que satisfaça simultaneamente todas as restrições, assim o problema não terá solução, caso contrário, deve-se continuar o algoritmo no passo seguinte.

Passo 05 - Determinar os vértices do polígono ou poliedro que formam o espaço de soluções viáveis. A solução ótima estará entre esses vértices.

Passo 06 - Avaliar a função objetivo em todos os vértices e aquele (ou aqueles, quando há mais de uma solução ótima) que maximiza ou minimiza o valor resultante da função objetivo, determinará a solução ótima do problema.

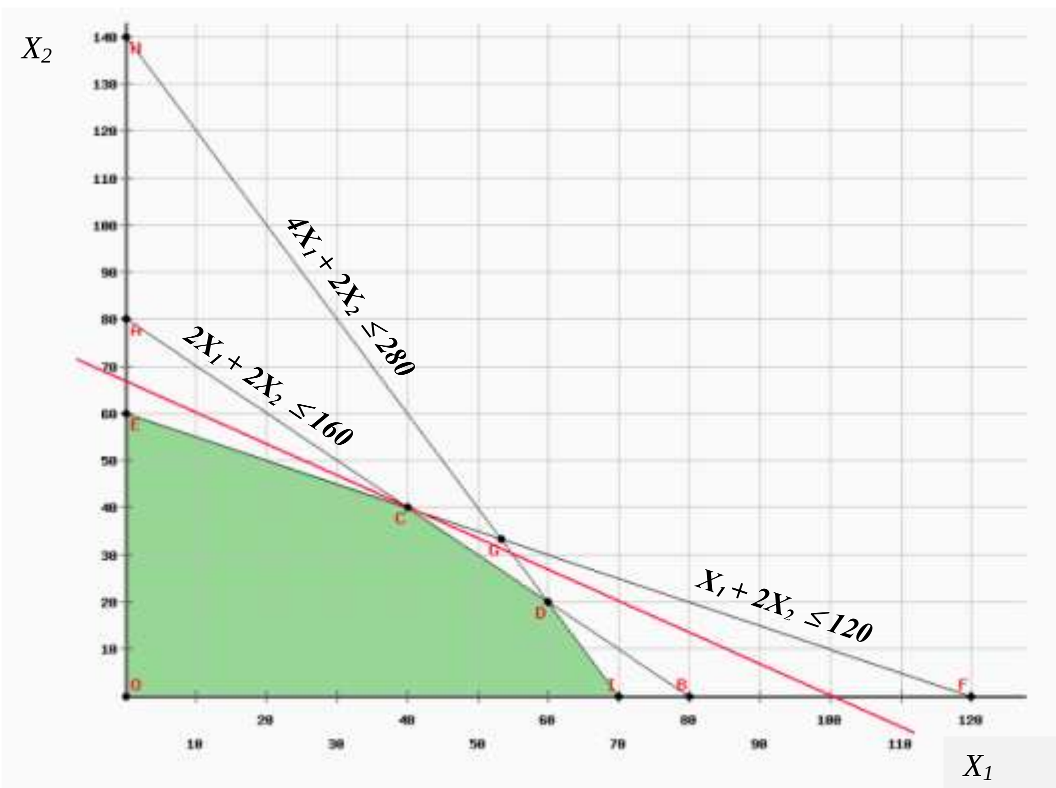
A fim de ilustrarmos, apresentamos a resolução gráfica do exemplo 1, acima discutido:

maximizar $Z = X_1 + 1,5X_2$

sujeito à $2X_1 + 2X_2 \leq 160$

$X_1 + 2X_2 \leq 120$

$4X_1 + 2X_2 \leq 280$



Como dito anteriormente, a região fechada formada pelas restrições é sempre convexa e contém todas as soluções possíveis ou viáveis: região das restrições, no gráfico acima, esta região está destacada pela cor verde.

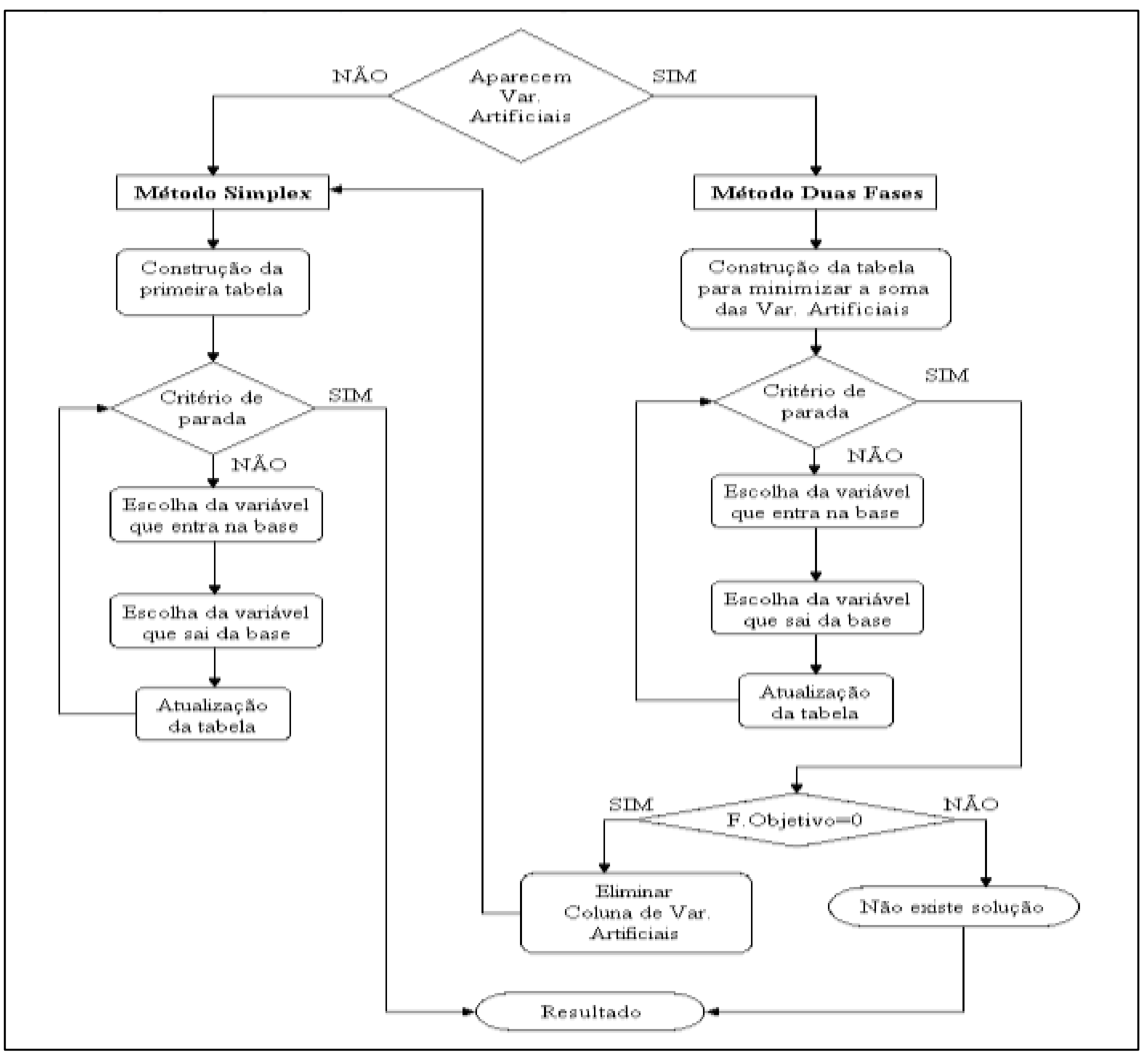
O valor de Z é maximizado quando *Z* atinge seu valor máximo, deve-se então avaliar a função objetivo e substituir as variáveis pelo valor das coordenadas de cada um dos vértices e escolher aquele que maximize esta função, neste caso, temos:

Z = 100, com X1 = 40 e X2 = 40

2.3 Algoritmo (ou método) Simplex

A algoritmo Simplex é um procedimento matricial para resolver o modelo de Programação Linear na forma normal. O método localiza continuamente soluções viáveis ocasionando melhores soluções para a função objetivo até ser obtida a solução ótima, a começar pelo X_0, ou seja, algoritmo usa um parâmetro de busca de modo que a próxima solução encontrada seja sempre melhor que a anterior, e como o conjunto possui um número finito de restrições, podemos ter certeza que o cálculo terá fim em algum ponto, e esta será a solução ótima do problema.

Diferente do método gráfico, o algoritmo Simplex é capaz de resolver problemas de Programação Linear com várias variáveis de decisão. A figura 3, ilustra as fases da resolução de



problemas de Programação Linear através do algoritmo simplex:

Figura 3 – Fluxograma da resolução através do algoritmo simplex. Disponível em: http://www.phpsimplex.com/pt/teoria_metodo_simplex.htm, acesso em 20 de julho de 2018

A figura acima apresenta o processo de resolução via algoritmo simplex. A priori, observa-se se o modelo possui variáveis artificiais, caso não, é possível resolver o problema através do método simplex, em seguida, constrói-se a primeira tabela simplex e verifica-se o critério de parada, caso sim, tem-se o resultado, caso não, escolhe-se as variáveis que vão entrar e sair da base, feito isso, atualiza-se a tabela e novamente verifica o critério de parada, caso não seja atingindo, deve-se repetir os três passos anteriores até que se atinja esse critério para a obtenção do resultado. Caso o problema a ser resolvido apresente variáveis artificiais, é necessário que seja resolvido pelo método duas fases, neste, temos que construir a tabela simplex para minimizar as variáveis artificiais. Posteriormente, verifica-se o critério de parada, caso seja atingido, obtém-se a função objetivo, caso não, escolhe-se as variáveis que vão entrar e sair da base, feito isso, atualiza-se a tabela novamente e verifica o critério de parada. Caso não seja atingido, repete-se os três passos anteriores até que seja atingido. Atingido o critério de parada, deve-se observar se a função objetivo está igualada a zero, em negativa, o problema não terá nenhuma solução viável, caso afirmativo, elimina-se a coluna das variáveis artificiais e passa a resolver pelo método simplex, até obter a solução.

2.3.1 Passo a passo da resolução através do Algoritmo Simplex

Para iniciar a resolução de um problema de Programação Linear é necessário realizarmos alguns procedimentos. Para exemplificar o passo a passo, vamos resolver o mesmo problema que foi resolvido através do método gráfico anteriormente.

Maximizar $Z = X_1 + 1{,}5X_2$

Sujeito à $2X_1 + 2X_2 \leq 160$

$X_1 + 2X_2 \leq 120$

$4X_1 + 2X_2 \leq 280$

Passo 01 - Normalizar as restrições.

As inequações são transformadas em equação adicionando variáveis de folga, de excesso e artificiais, conforme a tabela a seguir:

Tipo de desigualdade	Tipo de variável que aparece
$\geq$	- Excesso + artificial
=	+ artificial
$\leq$	+ folga

Como todas as restrições do problema a ser resolvido tem sinais de desigualdade do tipo **≤,** acrescentamos variáveis de folga em cada uma delas.

Ex:

Restrição 1 => $2X_1 + 2X_2 \leq 160$ ⇔ $2X_1 + 2X_2 + x_{F1} = 160$
Restrição 2 => $X_1 + 2X_2 \leq 120$ ⇔ $X_1 + 2X_2 + x_{F2} = 120$
Restrição 3 => $4X_1 + 2X_2 \leq 280$ ⇔ $4X_1 + 2X_2 + x_{F3} = 280$

Passo 02 - Passar todos os elementos da função objetivo para o primeiro membro e igualar a zero.

Ex: $Z = X_1 + 1{,}5X_2$ ⇔ $Z - X_1 - 1{,}5X_2 = 0$

Passo 03 - Escrever a tabela inicial do Algoritmo Simplex.

A tabela inicial do Método Simplex é composta por todos os coeficientes das variáveis de decisão do problema original e as de folga (ou de excesso e artificiais adicionadas, de acordo com a tabela do passo 01). Nas colunas, temos $P_{0,}$ que corresponde ao termo independente, além das variáveis e variáveis de folga, X_i e xf_i, e das restrições (das linhas). A coluna Cb contém os coeficientes das variáveis que estão na base. A primeira linha é formada pelos coeficientes da função objetivo, enquanto que a última linha contém o valor da função objetivo e os *custos reduzidos* Zj - Cj.

Ex:

Tabela I. Iteração 1							
			1	1,5	0	0	0
base	C_b	P_0	x_1	x_2	Xf_1	xf_2	Xf_3
Xf_1	0	160	2	2	1	0	0
Xf_2	0	120	1	2	0	1	0
Xf_3	0	280	4	2	0	0	1

Z	-	0	-1	-1,5	0	0	0

Passo 04 – Critério de parada**.**

A maximização é alcançada quando não existe nenhum valor negativo na última linha (Z). Pois, dessa forma já não haverá nenhuma outra possibilidade de melhoria, o valor de Z (coluna P0) é a solução ótima do problema, considerando o valor de cada variável.

Passo 05 – Escolha da variável de entrada e saída da base.

Em primeiro lugar, determina-se a variável que entra na base. Para isto é escolhida a coluna em que o valor da linha Z seja o menor entre todos os negativos. Neste exemplo, será a variável x_2, de coeficiente -1,5. Esta será a variável que entra na base, também chamada de coluna pivô. (coluna colorida de azul)

Depois de obter-se a variável que entra na base, determina-se qual será a variável que sairá da mesma. Esta escolha é baseada em uma operação simples: dividir cada termo independente (coluna P0) entre o elemento correspondente da coluna pivô, desconsiderando os elementos que forem menores ou iguais a zero. A linha escolhida é a linha cujo resultado é o menor.

Neste exemplo temos: 160/2 = **80,** 120/2 = **60** e 280/2 = **140**

O termo da coluna pivô que na divisão anterior deu lugar ao menor quociente positivo, este termo indica a linha de variável de folga que sai da base. Neste caso, resulta ser Xf_2 de coeficiente 2. Esta linha chama-se linha pivô. (linha colorida de azul).

Passo 06 – Atualizar tabela.

Os novos valores da tabela devem ser calculados da seguinte forma:

- Para calcular a Nova Linha Pivô (NLP) deve-se dividir os elementos da linha pivô atual pelo elemento pivô, localizado no cruzamento da linha pivô com a coluna pivô.
- Para calcular as demais linhas, deve-se subtrair os elementos da linha a ser calculada pelo produto da multiplicação do elemento correspondente à linha a ser calculada na coluna pivô pela Nova Linha Pivô (NLP). Com isto se normaliza o elemento pivô e seu valor torna-se 1, enquanto que os demais elementos da coluna pivô são anulados.

Tabela correspondente a 2ª iteração

Tabela II. Iteração II							
			1	1,5	0	0	0
base	C_b	P_0	x_1	x_2	Xf_1	xf_2	Xf_3
Xf_1	0	40	1	0	1	-1	0
x_2	1,5	60	0,5	1	0	0,5	0
Xf_3	0	160	3	0	0	-1	1
Z	-	90	-0,25	0	0	0,75	0

Passo 07 - Nova verificação de critério de parada

Observa-se os valores atribuídos às variáveis na última linha, caso algum deles seja negativo, conclui-se que a solução ótima ainda não foi atingida. Neste exemplo observa-se que ainda há um valor negativo, -0,25. Portanto, temos que continuar iterando (passos 5 e 6)

- A variável que entra na base é X1, pois é a variável que corresponde à coluna em que se encontra o coeficiente -0,25.

- Para calcular a variável de saída, dividem-se os termos da coluna P0 entre os termos correspondentes da nova coluna pivô: 40/1 = 40, 60/0,5 = 120 e 160/3 = 53,33. Como o menor quociente positivo é 40, a variável que sai da base é X1.

- O elemento pivô é 1.

Após realizar os passos 5 e 6 novamente, atualizamos os valores das linhas, obtendo a seguinte tabela:

Tabela correspondente a 3ª iteração

Tabela III. Iteração III							
			1	1,5	0	0	0
base	C_b	P_0	x_1	x_2	Xf_1	xf_2	Xf_3
X_1	1	40	1	0	1	-1	0
X_2	1,5	40	0	1	-0,5	1	0
Xf_3	0	40	0	0	-3	2	1
Z	-	100	0	0	0,25	0,5	0

Passo 08 – Fim do algoritmo.

Ao observar os elementos na última linha (Z), percebe-se que todos os coeficientes são positivos, satisfazendo assim o critério de parada. Assim sendo, a solução ótima é dada pelo valor de Z na coluna dos termos independentes (P0), neste exemplo, Z = 100. Na mesma coluna, encontra-se o ponto em que esse valor é atingido, observando as linhas correspondentes das variáveis de decisão que entraram na base: $X_1 = 40$ e $X_2 = 40$.

Enfim, o Algoritmo Simplex caracteriza-se como uma ferramenta de resolução de Problemas de Programação Linear, percorrendo por todas soluções viáveis definindo uma sequência de vértices com valores que se aproximam do "ótimo", ou seja, da melhor solução. Assim sendo, PL permite escolher entre inúmeras alternativas a que maximize os lucros ou minimize os custos, contanto que o modelo esteja bem formulado, levando em consideração as limitações físicas do sistema. Dessa forma, há uma necessidade de acompanhar periodicamente o desenvolvimento do modelo, objetivando realizar ajustes sempre que houverem mudanças no panorama que intervém diretamente na solução definida.

No próximo capítulo faremos uso do Algoritmo Simplex a partir de nossos dados e do fenômeno observado, onde explicitaremos nossos caminhos metodológicos e enunciaremos nossos resultados.

CAPÍTULO 3 – O USO DO ALGORITMO SIMPLEX NA OTIMIZAÇÃO DOS RENDIMENTOS DA PRODUÇÃO DE QUEIJO: aspectos metodológico-analíticos

Conforme enunciado no capítulo 1, o método científico utilizado neste estudo coincide com o próprio delineamento processual da Modelagem Matemática, nos termos de Bassanezi (2002). De modo que, em uma perspectiva macro, também nos fundamentamos nos conceitos de uma pesquisa quanti-qualitativa (conforme SOUZA e KERBAUY, 2017), haja vista que os resultados quantitativos advindos do modelo matemático, poderão ser lidos de modo qualitativo em outros contextos.

Dito isso, os caminhos metodológicos percorridos, consistiram nos seguintes passos, amplamente discutidos no primeiro capítulo, razão pela qual não iremos retomar novamente:

Experimentação → Abstração → Resolução → Validação →Aplicação

3.1 Lócus-empírico: Laticínio

Com o intuito de aplicar os conceitos apresentados no decorrer deste trabalho, escolheu-se como lócus empírico, o Laticínio Campo Belo, um estabelecimento de médio porte, localizada no sudeste do Estado do Pará, mais precisamente na Vila Ubá, município de São João do Araguaia, microrregião de Marabá. O laticínio conta com uma equipe de 38 funcionários diretamente ligados ao laticínio, e 400 fornecedores de leite, os quais estão divididos entre os municípios: São João do Araguaia, São Domingos do Araguaia, Brejo Grande do Araguaia, El Dourado dos Carajás e Marabá.

Dentre as atividades proeminentes do laticínio, destaca-se a fabricação de vários tipos de queijos, como a Muçarela, Prato, Coalho e Parmesão. A pesquisa teve como foco a produção de queijos, tendo por objetivo principal a obtenção de um modelo que maximize o rendimento financeiro desta produção, determinando a solução ótima a partir de sua construção via Algoritmo Simplex.

3.2. Contexto do Problema a ser modelado (Experimentação):

Os dados sobre o laticínio apresentados a seguir, são reais, obtidos por meio de entrevistas *in loco* com o proprietário e a responsável química do estabelecimento, onde se obteve informações sobre o preço de comercialização e processo de produção dos queijos, identificando elementos para compor a função objetivo e as restrições, considerando as limitações físicas e industriais do laticínio, o preço de comercialização e a quantidade de leite recebido.

Tomando a coleta de dados como um passo inicial do processo de Modelagem Matemática, descrito em Bassanezi (2002, p. 26) por "experimentação", esta pesquisa buscou investigar a situação a fim de se inteirar do tema, para analisar e descrever de forma detalhada a real situação do objeto de estudo.

3.2.1- Equipamentos de produção e suas capacidades de volume

A fabricação dos queijos neste laticínio conta com os seguintes equipamentos (imagens em anexo): 01 pasteurizador, 02 Queijomatics (equipamento em que são acrescentados os insumos e ocorre a fermentação e o cozimento do leite líquido), 01 tanque (onde é depositada a massa que desce da queijomatic), 01 prensa (equipamento que separa o soro da massa), 01 salga (tanque em que os queijos ficam imersos em uma solução de sal contendo uma concentração fixa de cloreto de sódio).

O quadro 01 apresenta a capacidade dos equipamentos essenciais a produção dos queijos:

Quadro 1 - Capacidade física dos equipamentos

Equipamento	Capacidade Total
Queijomatic	11200 litros
Monobloco	600kg/h
Prensa	2000kg
Salga	10000kg

É importante ressaltar que a queijomatic e a prensa pode ser utilizada várias vezes ao longo do dia, pois o processo realizado nestes equipamentos leva de 01:45h à 02:45h, dependendo do tipo de queijo, isso significa que ela pode ser reabastecida. Portanto, há que se considerar que:

- A capacidade diária da queijomatic passa a ser 33.600 litros, pois pode ser utilizada 3 vezes em um dia.

- A capacidade diária da prensa passa a ser 4000kg, pois pode ser utilizada 2 vezes em um dia.

3.2.2. Abastecimento de Leite

No que diz respeito ao abastecimento de leite, apesar da sazonalidade, será considerado nos cálculos um volume diário de 33.300 litros de leite, o qual representa um valor médio diário. O quadro 02 apresenta as relações de quantidade de leite utilizada e preço de comercialização de cada um dos tipos de queijos (por quilo):

Quadro 2 – relação tempo de produção e preço de comercialização/kg

Queijo	Tempo de produção	Preço de comercialização/kg
Muçarela	2 dias	R$ 14,50
Prato	28 dias	R$ 15,50
Coalho	1 dia	R$ 15,50
Parmesão	180 dias	R$ 18,00

3.2.3. Os tipos de Queijo

A produção dos queijos tem processos distintos de fabricação, assim como quantidade de leite/kg para cada queijo, o que os levam a serem comercializados por preços diferentes.

Os produtos analisados foram os quatro tipos de queijo que o laticínio produz, são eles: Muçarela (a ser representado por X_1), Prato (a ser representado por X_2), Coalho (a ser representado por X_3) e Parmesão (a ser representado por X_4). Nesta produção foram feitas as seguintes observações: a quantidade de leite necessário, a capacidade de processamento nos equipamentos e quantidade de leite disponível. Tais observações versam as restrições na modelagem do problema, assim como os preços de comercialização versam os coeficientes da função objetivo.

3.2.3.1- Características dos queijos e processo de produção

Muçarela - possui massa amarelo-esbranquiçada, firme, compacta e de sabor ligeiramente ácido. apresenta formato retangular e, quando aquecido, derrete designando uma característica elástica, muito utilizado em pizzas e hambúrgueres. Este queijo passa pelo seguinte processo:

- Fermentação, adição de cloreto de cálcio, dessoragem e pré-cozimento (queijomatic).

- Filagem (fatiamento e cozimento em água à 75°C no monobloco).

- Salga

- Embalagem

Prato - apresenta massa semicozida e lavada, com consistência macia e sabor suave. Normalmente é um queijo fechado, podendo, entretanto, apresentar olhaduras (buracos no queijo).

- Fermentação, dessoragem e cozimento (queijomatic)

- Prensagem

- Salga

- Secagem e Maturação

- Embalagem

Coalho – possui alta umidade e massa cozida, uma de suas principais características é a firmeza depois de assado.

- Fermentação, dessoragem e cozimento (queijomatic)

- Prensagem

- Salga

- Secagem

- Embalagem

Parmesão - apresenta uma estrutura granular, duro, em decorrência da sua baixa umidade, o qual passa um longo período de maturação, que duram 180 dias, apresenta formato cilíndrico, sem olhaduras (buracos), com coloração tendendo ao amarelo palha e sabor característico, salgado, não ácido, com nota adocicada ao picante.

- Fermentação, dessoragem e cozimento (queijomatic)

- Prensagem

- Salga

- Maturação

- Embalagem

A determinação das restrições foi feita com base nas receitas dos queijos e seus tempos de preparo, visto que o processo de produção depende da quantidade de leite disponível e das disponibilidades dos equipamentos (queijomatic, prensas, Salgas, tanques) utilizados no processo. O quadro 3 apresenta o tempo necessário de processamento em cada um dos equipamentos por tipo de queijo:

Quadro 3 – tempo de processamento necessário por tipo de queijo

Equipamento	**Tempo necessário por tipo de queijo**			
	Muçarela	**Prato**	**Coalho**	**parmesão**
Queijomatic	2h:15	2h:45	1h:45	01:45
Monobloco	1h = 600kg	_	_	_
Prensa	_	2h:30	0h:35	0h:50
Salga	24h	24h	24h	24h
secagem	24h	24h	12h	24h
maturação	_	26(dias)	_	180(dias)

3.3 Problema de otimização de rendimentos na produção de queijo

O laticínio Campo Belos recebe leite diariamente destinado a produção de queijos. É sabido que este laticínio produz 4 tipos de queijo, Muçarela (X_{1}), Prato (X_{2}), Coalho(X_3) e Parmesão (X_4). Sabe-se que:

- Os preços de comercialização dos queijos por quilo são: Muçarela (R$14,50), Prato (R$ 15,50), Coalho (R$15,50) e Parmesão (R$18,00). Deve-se considerar que cada tipo de queijo tem um prazo (em dias) diferente para estar apto a ser comercializado, assim sendo, temos os seguintes lucros médios diários:

- Muçarela => 14,5/2 (dias) = R$7,25
- Prato => 15,5/28 (dias) = R$0,55 (aproximadamente)
- Coalho => 15,5/1(dias) = R$15,5
- Parmesão => 18/180 (dias) = R$ 0,1

- Para produzir 1 quilo de cada um dos queijos Muçarela, Coalho e Prato são necessários 10 litros de leite e para produzir 1 quilo de queijo parmesão, são necessários 11,5 litros de leite.
- A capacidade máxima da Queijomatic é 33.600 litros de leite
- A capacidade máxima da Prensa é 4.000 quilos
- A capacidade máxima da Salga é 10.000 quilos
- Por interesse de mercado, é necessário que o laticínio produza no mínimo 1650 quilos de queijo Muçarela, e no mínimo 495 quilos de cada um dos demais (Prato, Coalho e Parmesão).

Sabendo que o laticínio recebe, em média, 33.300 litros de leite, por dia, quantos quilos de cada tipo de queijo devem ser produzidos para que se obtenha um rendimento financeiro máximo?

3.4 Formulação do modelo

Nesta etapa, buscou-se formular o modelo a partir dos dados coletados, configurando-se como a etapa de “Abstração”, na perspectiva de Bassanezi (2002) ou de “Matematização”, na perspectiva de Biembegutt (2000). Esta etapa consiste em traduzir a situação-problema para a linguagem matemática, afim de montar a função objetivo e as restrições do modelo. Assim sendo, temos:

Maximizar $Z = 7{,}25X_1 + 0{,}55X_2 + 15{,}5X_3 + 0{,}1X_4$

Sujeito à:

$10X_1 + 10X_2 + 10X_3 + 11{,}5X_4 \leq 33.300$ (Quantidade de leite/dia)

$10X_1 + 10X_2 + 10X_3 + 11{,}5X_4 \leq 33.600$ (Capacidade da queijomatic/dia**)**

$X_2 + X_3 + X_4 \leq 4000$ (Capacidade da prensa/dia)

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 10.000$ (Capacidade da salga/dia**)**

$X_1 \geq 1650$ (quantidade mínima de queijo muçarela – demanda de mercado)

$X_2 \geq 495$ (quantidade mínima de queijo prato – demanda de mercado)

$X_3 \geq 495$ (quantidade mínima de queijo coalho – demanda de mercado)

$X_4 \geq 495$ (quantidade mínima de queijo parmesão – demanda de mercado)

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$ (não negatividade)

3.5 Resolução do problema

Passo 01 - Normalizar as restrições.

• Como a restrição 1 é do tipo “≤” é necessária a variável de folga X5.

• Como a restrição 2 é do tipo “≤” é necessária a variável de folga X6.

• Como a restrição 3 é do tipo “≤” é necessária a variável de folga X7.

• Como a restrição 4 é do tipo “≤” é necessária a variável de folga X8.

• Como a restrição 5 é do tipo “≥” é necessária a variável de excesso X9 e a variável artificial X13.

• Como a restrição 6 é do tipo “≥” é necessária a variável de excesso X10 e a variável artificial X14.

• Como a restrição 7 é do tipo “≥” é necessária a variável de excesso X11 e a variável artificial X15.

• Como a restrição 8 é do tipo “≥” é necessária a variável de excesso X12 e a variável artificial X16.

Passo 02 - Passar todos os elementos da função objetivo para o primeiro membro e igualar a zero.

$Z - 7.25\ X_1 - 0.55\ X_2 - 15.5\ X_3 - 0.1\ X_4 - 0\ X_5 - 0\ X_6 - 0\ X_7 - 0\ X_8 - 0\ X_9 - 0\ X_{10} - 0\ X_{11} - 0\ X_{12} - 0\ X_{13} - 0\ X_{14} - 0\ X_{15} - 0\ X_{16} = 0$

Construção da tabela:

Tabela 1			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**	**P13**	**P14**	**P15**	**P16**
P5	0	33300	10	10	10	11.5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P6	0	33600	10	10	10	11.5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P7	0	4000	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P8	0	10000	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P13	-1	1650	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
P14	-1	495	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
P15	-1	495	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
P16	-1	495	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1
Z		-3135	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0

A variável que vai sair da base é P13 e a que entra P1

Tabela 2			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**	**P13**	**P14**	**P15**	**P16**
P5	0	16800	0	10	10	11.5	1	0	0	0	10	0	0	0	-10	0	0	0
P6	0	17100	0	10	10	11.5	0	1	0	0	10	0	0	0	-10	0	0	0
P7	0	4000	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P8	0	8350	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	0

P1	0	1650	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
P14	-1	495	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
P15	-1	495	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
P16	-1	495	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1
Z		-1485	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

A variável que vai sair da base é P14 e a que entra P2.

Tabela 3			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**	**P13**	**P14**	**P15**	**P16**
P5	0	11850	0	0	10	11.5	1	0	0	0	10	10	0	0	-10	-10	0	0
P6	0	12150	0	0	10	11.5	0	1	0	0	10	10	0	0	-10	-10	0	0
P7	0	3505	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
P8	0	7855	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	-1	-1	0	0
P1	0	1650	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
P2	0	495	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
P15	-1	495	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
P16	-1	495	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1
Z		-990	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0

A variável que vai sair da base é P15 e a que entra P3.

Tabela 4			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**	**P13**	**P14**	**P15**	**P16**
P5	0	6900	0	0	0	11.5	1	0	0	0	10	10	10	0	-10	-10	-10	0
P6	0	7200	0	0	0	11.5	0	1	0	0	10	10	10	0	-10	-10	-10	0
P7	0	3010	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	-1	-1	0
P8	0	7360	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	0
P1	0	1650	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
P2	0	495	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
P3	0	495	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
P16	-1	495	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1
Z		-495	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0

A variável que vai sair da base é P16 e a que entra P4.

Tabela			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1

5																	
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**	**P13**	**P14**	**P15**	**P16**
P5	0	1207.5	0	0	0	0	1	0	0	0	10	10	10	11.5	-10	-10	-10	-11.5
P6	0	1507.5	0	0	0	0	0	1	0	0	10	10	10	11.5	-10	-10	-10	-11.5
P7	0	2515	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	-1	-1	-1
P8	0	6865	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
P1	0	1650	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
P2	0	495	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
P3	0	495	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
P4	0	495	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1
Z		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Existe alguma solução possível para o problema, assim nós podemos passar para a Fase II para calcula-la:

Tabela 1			7.25	0.55	15.5	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**
P5	0	1207.5	0	0	0	0	1	0	0	0	10	10	10	11.5
P6	0	1507.5	0	0	0	0	0	1	0	0	10	10	10	11.5
P7	0	2515	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
P8	0	6865	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
P1	7.25	1650	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
P2	0.55	495	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
P3	15.5	495	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
P4	0.1	495	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1
Z		19956.75	0	0	0	0	0	0	0	0	-7.25	-0.55	-15.5	-0.1

A variável que vai sair da base é P5 e a que entra P11.

Tabela 2			7.25	0.55	15.5	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
Base	**Cb**	**P0**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**
P11	0	120.75	0	0	0	0	0.1	0	0	0	1	1	1	1.15

P6	0	300	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
P7	0	2394.25	0	0	0	0	-0.1	0	1	0	-1	0	0	-0.15
P8	0	6744.25	0	0	0	0	-0.1	0	0	1	0	0	0	-0.15
P1	7.25	1650	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
P2	0.55	495	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
P3	15.5	615.75	0	0	1	0	0.1	0	0	0	1	1	0	1.15
P4	0.1	495	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1
Z		21.828.375	0	0	0	0	1.55	0	0	0	8.25	14.95	0	17.725

A solução ótima é Z = 21.828,375

X1 = 1650

X2 = 495

X3 = 615.75

X4 = 495

Desfazendo a relação lucro/tempo de produção, e multiplicando o valor das variáveis pelo custo de comercialização de cada uma delas, temos:

X_1 = 1.650 * 14,5 = 23.925 (se comercializado integralmente assim que estiver pronto, o laticínio tem retorno desse valor em 2 dias).

X_2 = 495 * 15,5 = 7.672,5 (se comercializado integralmente assim que estiver pronto, o laticínio tem retorno desse valor em 28 dias)

X_3 = 615,75 * 15,5 = 9.544,125 (se comercializado integralmente assim que estiver pronto, o laticínio tem retorno desse valor em 1 dia)

X_4 = 495 * 18 = 8.910 (se comercializado integralmente assim que estiver pronto, o laticínio só terá retorno desse valor em 6 meses).

Dessa forma, soma-se um lucro máximo diário de R$ 50.051,125.

3.5 Validação do modelo

O algoritmo simplex, como um método de apoio à decisão, mostrou que, para que se tenha lucro máximo, considerando as restrições acima citadas, deveria produzir 1650 quilos de queijo Muçarela, 495 quilos Prato, 615,75 quilos Coalho e 495 quilos de Parmesão, adquirindo um rendimento máximo diário de R$ 50.051,125. Realizando uma comparação com a forma que o laticínio vem produzindo os queijos, observa-se um rendimento de R$ 48.000,00; dessa forma, podemos concluir que o modelo está apto a ser validado e otimizou o lucro da produção de queijos em R$ 2.045,125.

Considerações Finais

O presente trabalho construiu um modelo matemático que maximizou os rendimentos financeiros da produção de queijos de um laticínio, definindo a solução ótima através do algoritmo simplex e adotando a Modelagem Matemática como método cientifico de pesquisa. Vale ressaltar que o resultado obtido não é garantia exclusiva para alcançar o resultado financeiro máximo, e sim, uma alternativa, fundamentada em método científico para empregar racionalmente os recursos existentes no laticínio, através das análises estabelecidas.

Mostramos que os conhecimentos matemáticos adquiridos durante a formação superior são capazes de desenvolver resultados que contribuem socialmente e economicamente com o pequeno e médio produtor rural. Trata-se de uma aplicabilidade matemática voltada aos anseios e demandas da comunidade, que por sua vez, vai propiciar apoio científico as suas decisões laborais diárias.

O estudo de Programação Linear utilizando a Modelagem Matemática como um método cientifico de pesquisa, desenvolve-se a partir de atividades interdisciplinares e contextualizadas de forma natural, visto que, faz uso de informações e instrumentos de outras áreas para a construção de modelos. Assim sendo, para além de um método cientifico de pesquisa, a Modelagem Matemática pode ser utilizada como uma alternativa de metodologia de ensino que pode garantir uma aprendizagem significativa por partes dos alunos.

Desse modo, indicamos a continuidade desse estudo em uma perspectiva de metodologia didática em sala de aula, para o ensino de equações, inequações, funções lineares, sistemas lineares e tópicos de matemática financeira. A utilização da Modelagem Matemática na produção do queijo, como estratégia de ensino e aprendizagem, pode encontrar lugar em uma prática docente profícua para se ensinar matemática, mostrando sua aplicabilidade em contextos regionais, através de conhecimentos adquiridos durante a Educação Básica.

Conclui-se afirmando que o trabalho desenvolvido cumpriu com os objetivos almejados e proporcionou aprendizagens significativas à minha formação, uma vez que, contribuiu com conhecimentos, tanto sobre Modelagem Matemática, quanto sobre Programação Linear.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, 2006.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM**.**

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. **30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. In: ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. Blumenau: Ed. Contexto, 2000.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

BOLDRINI, L. J.et.al. **Álgebra Linear**. 3a edição. SP. Editora Harbra. 1980.

MELO, J. N. B. **Uma Proposta de Ensino Médio e Aprendizagem de Programação Linear no Ensino Médio**. 2012. 124 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Porto Alegre, 2012.

SCHEFFER, N. F.; CAMPAGNOLLO, A. J. **Modelagem Matemática uma alternativa para o ensino-aprendizagem da Matemática no meio rural**. Revista Zetetiké, Campinas, SP, v. 6, n. 10, p. 35-55, jul./dez.1998.

SOUZA, K.R; KERBAUY, M.T.M. **Abordagem quanti-qualitativa: superação da dicotoamia quantitativa-qualitativa na pesquisa em Educação.** Educação e filosofia. v. 31, n. 61, 2017.

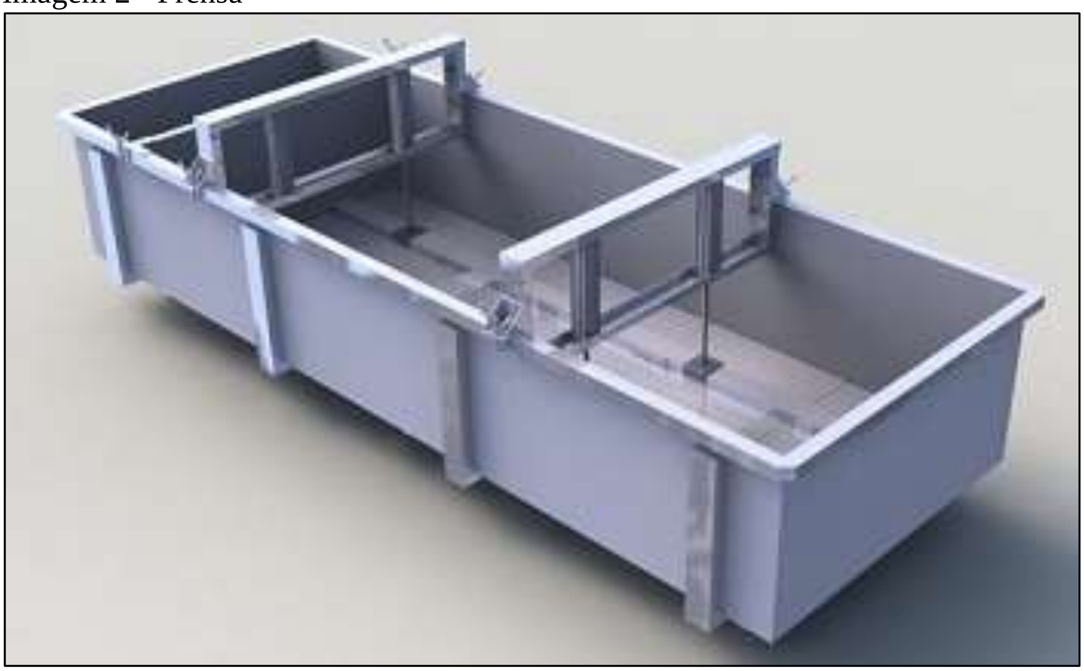
ANEXOS

Equipamentos utilizados durante o processo de produção de Queijo

Imagem 1 - Queijomatic

Fonte: https://tekmilk.com.br acesso em: 26 de julho de 2018

Imagem 2 - Prensa



Fonte: https://tekmilk.com.br acesso em: 26 de julho de 2018

Imagem 3 – Monobloco (máquina de filar)

Fonte: https://tekmilk.com.br de julho de 2018

Imagem 4 – Salga

Fonte: http://www.guialat.com.br de julho de 2018