



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS HUMANAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO DO CAMPO**

LUCAS MATEUS SANTOS DA SILVA

**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: O ensino de geometria
analítica a partir da prática do plantio de maracujá**

**MARABÁ-PA
2019**

LUCAS MATEUS SANTOS DA SILVA

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: O ensino de geometria analítica a partir da prática do plantio de maracujá

Artigo apresentado como TCC à Faculdade de Educação do Campo, da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Licenciatura em Educação do Campo, ênfase em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Marcos Guilherme Moura Silva.

MARABÁ- PA
2019

LUCAS MATEUS SANTOS DA SILVA

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: O ensino de geometria analítica a partir da prática do plantio de maracujá

TCC apresentado à Faculdade de Educação do Campo, da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, como requisito para obtenção do título de Graduado em Licenciatura em Educação do Campo, ênfase em Matemática.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcos Guilherme Moura Silva (FECAMPO/Unifesspa - Orientador)

Prof. Dr. Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior (FECAMPO/ Unifesspa)

Prof. Dr. José Sávio Bicho de Oliveira (FECAMPO/ Unifesspa)

MARABÁ- PA
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Setorial Campus do Taurizinho da Unifesspa

Silva, Lucas Mateus Santos da

Educação matemática realística: o ensino de geometria analítica a partir da prática do plantio de maracujá / Lucas Mateus Santos da Silva ; orientador, Marcos Guilherme Moura Silva. — Marabá : [s. n.], 2019.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Instituto de Ciências Humanas, Faculdade de Educação do Campo, Curso de Licenciatura Plena em Educação do Campo, Marabá, 2019.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria Analítica. 3. Educação rural. 4. Escolas rurais. I. Silva, Marcos Guilherme Moura, orient. II. Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará. III. Título.

CDD: 22. ed.: 510.7

Aos meus pais,
Antonio Clemilson Souza Silva e Raimunda Luisa Santos da Silva, pelos muitos ensinamentos de valores morais e pelo grande empenho em minha educação e abundância de amor.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao fim desta minha caminhada gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por todas às vezes que me abençoou na plenitude de sua bondade e que com seu imenso amor, zelou de meus passos conduzindo-me no caminho do bem, dando-me coragem pra enfrentar os momentos difíceis e perseverança na busca dos meus sonhos.

A Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), através da Faculdade de Educação do Campo (FECAMPO) por ter me proporcionado alcançar este sonho de cursar um nível superior com o espaço físico, corpo técnico e professores comprometidos.

Ao meu Professor Orientador Dr. Marcos Guilherme Moura Silva pela dedicação, paciência e sabedoria no decorrer desta jornada para que no término possibilitasse êxito, meus sinceros agradecimentos e todas as palavras escrita seriam insuficientes para descrever essa joia rara que Deus permitiu cruzar no meu caminho.

Aos professores Dr. Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior e Dr. José Sávio Bicho de Oliveira, examinadores que participaram da minha banca de defesa e contribuíram partilhando dos seus conhecimentos durante o curso e em especial nas disciplinas as quais ministraram, os meus eternos agradecimentos.

Ao corpo docente da Faculdade em Educação do Campo e em especial aos professores da área de Matemática que ministraram disciplinas para mim: Dr. Marcos Guilherme Moura Silva, Dr. Carlos Alberto Gaia Assunção, Dr. Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior, Dr. José Sávio Bicho de Oliveira.

Aos meus colegas da turma de graduação que juntos embarcamos neste sonho em busca de novos conhecimentos para partilharmos e contribuirmos de forma significativa em nossas comunidades.

E a todos os amigos e familiares que me acompanharam, apoiaram e incentivaram em tantos momentos difíceis pelos quais passei durante essa caminhada e por compartilhar das alegrias vividas, meus mais sinceros agradecimentos.

SUMÁRIO

1. Introdução	9
2. Educação Matemática Realística- EMR	9
3. Caminho Metodológico	13
3.1. Estratégias pedagógicas.....	13
3.2. Roteiro metodológico de intervenção.....	14
4. Discussões e Resultados	15
4.1. Problema Contextual	17
4.2. Nível Situacional	18
4.3. Nível Referencial.....	18
4.4. Nível Geral	20
4.5. Nível Formal.....	20
4.6. Situação problema 1- Distância entre dois pontos:	21
4.7. Situação problema 2- Alinhamento de três pontos	22
5. Conclusão.....	24
REFERÊNCIAS	25

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: O ensino de geometria analítica a partir da prática do plantio de maracujá

Lucas Mateus Santos da Silva¹

Marcos Guilherme Moura Silva²

Resumo

Um problema permanente no ensino e aprendizagem da matemática é como ampliar no aprendente formas de raciocínios intuitivos e informais para modos mais sofisticados e formais, pelo qual a disciplina está assentada. Analisamos as contribuições da Teoria de Designer Instrucional da Educação Matemática Realística (EMR), a partir de sua heurística sobre modelos emergentes para o ensino de Geometria Analítica, visando preencher a lacuna entre o conhecimento informal e a matemática formal na prática do professor de matemática. Para tanto, elaboramos uma abordagem de ensino empírica fundamentada nos princípios da EMR e na modelagem de problemas contextuais a partir do plantio de maracujá (*passiflora edulis*). Nossos resultados apontam a EMR como uma abordagem teórica/metodológica capaz de promover raciocínios formais, conceitos em situações realísticas, apropriação de linguagem matemática e potencial para o desenvolvimento de conceitos no ramo da geometria cartesiana para ensinar matemática no campo.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística, Modelos Emergentes, Geometria Analítica, Escola Rural. Educação do Campo.

REALISTIC MATHEMATIC EDUCATION: The teaching of analytical geometry from the practice of passion fruit planting

Abstract

A permanent problem in the teaching and learning of mathematics is how to extend in the learner forms of intuitive and informal reasoning to more sophisticated and formal ways in which the discipline is based. We analyze the contributions of the Instructional Designer Theory of Realistic Mathematical Education (EMR), based on his heuristic on emerging models for the teaching of Analytical Geometry, in order to fill the gap between informal knowledge and formal mathematics in the practice of mathematics teacher. For that, an empirical approach was elaborated based on the principles of RMS and in modeling contextual problems from passion fruit planting (*passiflora edulis*). Our results point to EMR as an approach capable of promoting formal reasoning, concepts in realistic situations, formulation of mathematical language and potential for the development of concepts in the field of Cartesian geometry to teach mathematics in the field.

¹ Licenciando em Educação do Campo com ênfase em Matemática pela Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA). E-mail: lucasmateus1491@gmail.com.

² Doutor em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professor da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), Brasil. E-mail: guilhermemoura@unifesspa.edu.br

Keywords: Realistic Mathematics Education, Emerging Models, Analytical Geometry, Rural School, Field Education.

1. Introdução

Este artigo é um “Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Educação do Campo” pela Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), fruto do Programa de Extensão vinculado ao PIBEX (Programa Institucional de Bolsas de Extensão), intitulado “Tutorial didático interativo e o ensino de matemática por investigação: uma articulação com fazer pedagógico das escolas do campo”. No referido projeto o objetivo era elaborar um tutorial didático interativo sob a égide do ensino de matemática por investigação, como apoio aos educadores que atuam nas escolas do campo.

Neste sentido, a pesquisa foi desenvolvida na Escola Estadual de Ensino médio Dr. Abel Figueiredo em uma turma do 3º ano com as ações pautadas no cronograma, sendo orientadas considerando os pressupostos teóricos que fundamentaram o projeto como método de continuar a desenvolver estudos na mesma perspectiva.

Portanto, este estudo objetiva analisar as contribuições da Teoria de Designer Instrucional da Educação Matemática Realística (EMR), a partir de sua heurística sobre modelos emergentes para o ensino de Geometria Analítica, visando preencher a lacuna entre o conhecimento informal das práticas cotidianas e a matemática formal da escola. Sendo, parte de um experimento de ensino sobre Geometria Analítica conduzida no contexto de uma escola rural, balizado em compreensões conceituais acerca da geometria cartesiana, abordando dois tópicos importantes no percurso formativo dos estudantes que são: a distância entre dois pontos e o alinhamento entre três pontos.

2. Educação Matemática Realística- EMR

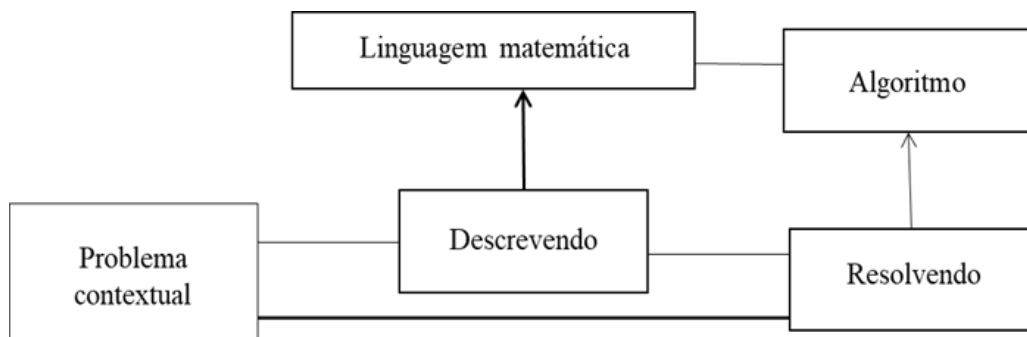
A Teoria de designer instrucional da Educação Matemática Realística – EMR (Em inglês, *Realistic Mathematics Education- RME*), tem suas origens na década de 1970, na Holanda, no esforço universal de melhorar o pensamento matemático. Ela se baseia na interpretação de Hans Freudenthal que concebeu a matemática como uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1983; GRAVEMEIJER, 1994). De algum modo, a EMR guarda semelhanças com os “Centros de Interesse” de Decroly (GRAVEMEIJER 1994, 1999; TERWEL, 2000).

Na perspectiva de Freudental (1983), os alunos devem aprender matemática através de um processo de matematização progressiva³, baseando-se em problemas contextuais reais ou matematicamente autênticos. A esse respeito, nota-se que a teoria da EMR é primariamente uma proposição sobre construção de conhecimento, ela não se atém a motivar os alunos com contextos de vida cotidiana, mas a fornecer contextos experiencialmente reais de modo a serem usados naquele processo de matematização progressiva (GRAVEMEIJER, 1999). De fato, a “EMR é voltada a capacitar os alunos a inventar seus próprios métodos de raciocínio e estratégias de solução, levando a um entendimento conceitual mais forte” (RASMUSSEN e BLUMENFELD, 2007, p.198).

Os problemas contextuais objetivam um processo de reinvenção por parte dos alunos para lidar com a matemática formal e devem ser realísticos, do ponto de vista de fornecerem elementos para imaginar, realizar, fazer ideia, e por sua vez, tornar-se real na mente dos estudantes. Isso sugere que os problemas contextuais não precisam ser autenticamente reais, mas precisam ser imagináveis, realizáveis, concebíveis (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005; FERREIRA & BURIASCO, 2016).

A partir de um problema contextual, os alunos poderão extrair informações e usar estratégias informais por tentativa e erro para resolver o problema. Esse nível, na EMR, é denominado matematização horizontal. A tradução dessas informações para uma linguagem matemática, fazendo uso de símbolos e progredindo para seleção de algoritmos, como uma equação, por exemplo, é denominada matematização vertical (ver figura 1). Trata-se de um processo envolvendo a resolução da situação-problema em diferentes níveis.

Figura 1. Matematização horizontal e matematização vertical.



Fonte: GRAVEMEIJER (2004).

³ Em uma perspectiva pedagógica, matematizar é explorar contextos de modo a compreendê-los/organizá-los matematicamente.

Os problemas contextuais são considerados elementos chaves na Educação Matemática Realística, e devem ser capazes de formar conceitos e modelos (TREFFERS e GOFFREE, 1985). Ferreira e Buriasco (2015, p. 457), baseadas em De Lange (1987), classificam os problemas contextuais em primeira, segunda e terceira ordem, de acordo com seus objetivos e potencialidades de matematização, como segue:

Contexto de Zero Ordem: É utilizado para tornar o problema parecido com uma situação da vida real. Denominados por De Lange (1999) de “contexto falso”, “contexto de camuflagem”. Problemas que contêm esse tipo de contexto devem ser evitados; **Contexto de Primeira Ordem:** É aquele que apresenta operações matemáticas “textualmente embaladas”, no qual uma simples tradução do enunciado para uma linguagem matemática é suficiente (DE LANGE, 1987). Esse tipo de contexto é relevante e necessário para resolver o problema e avaliar a resposta; **Contexto de Segunda Ordem:** É aquele com o qual o estudante é confrontado com uma situação realística e dele é esperado que encontre ferramentas matemáticas para organizar, estruturar e resolver a tarefa (DE LANGE, 1987). Esse tipo de contexto, segundo De Lange (1999), envolve matematização ao passo que, nos contextos de primeira ordem, os problemas já são pré-matematizados; **Contexto de Terceira Ordem:** Como aquele que possibilita um “processo de matematização conceitual”, esse tipo de contexto serve para “introduzir ou desenvolver um conceito ou modelo matemático” (De Lange, 1987, p. 76, grifos do autor).

Avançando no entendimento dos fundamentos da EMR para além dos problemas contextuais e suas classificações, Treffers (1987) definiu cinco princípios para a Educação Matemática Realista, a saber:

Tabela 1. Princípios da Educação Matemática Realística

Exploração fenomenológica	A atividade matemática não é iniciada a partir do nível formal, mas a partir de uma situação que é experiencialmente real para o aluno.
Uso de modelos e símbolos para a matematização progressiva	O segundo princípio da EMR é sair do nível do concreto para o nível mais formal usando modelos e símbolos.
Uso da própria construção dos alunos	Os alunos são livres para usar e encontrar suas próprias estratégias para solucionar problemas bem como para desenvolver o próximo processo de aprendizagem.
Interatividade	O processo de aprendizagem dos alunos não é somente individual, mas também um processo social.
Interconexão	O desenvolvimento de uma visão integradora da matemática, conectando vários domínios da matemática pode ser considerada uma vantagem dentro da EMR.

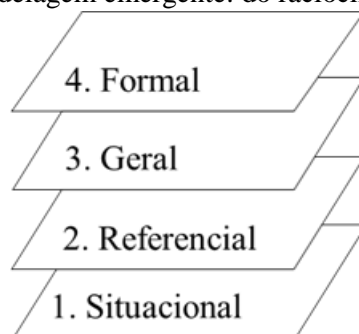
Fonte: Baseado em Treffers (1987).

Uma heurística central da EMR, abrangente a todos esses princípios, denomina-se modelos emergentes, capazes de promover nos alunos modos de raciocínio para o desenvolvimento da matemática formal (GRAVEMEIJER, 1999).

Zandieh e Rasmussen (2010) definem modelos como formas de organizar uma atividade, seja a partir de ferramentas observáveis, como gráficos, diagramas e objetos, ou ferramentas mentais, referindo-se as maneiras pelos quais os alunos pensam e raciocinam enquanto resolvem um problema (TREFFERS e GOFFREE, 1985; TREFFERS 1987, 1991; GRAVEMEIJER, 1994). Os modelos são chamados emergentes no sentido de que as várias formas de criar e usar ferramentas, gráficos, análises, expressões, emergem de modo concomitante às formas de raciocínio cada vez mais sofisticadas.

A heurística do modelo emergente envolve quatro níveis para o desenvolvimento desse raciocínio matemático, indo do nível situacional até o nível formal, elucidados na figura abaixo:

Figura 2. Níveis da modelagem emergente: do raciocínio situacional ao formal.



Fonte: GRAVEMEIJER (2004).

A intenção é que a cada nível de modelagem emergente, a atividade matemática dos alunos mude de uma solução contextual (modelo de) para uma solução mais geral (modelo para) (GRAVEMEIJER; BOWERS; STEPHAN, 2003).

O **nível situacional** é o nível básico dos modelos emergentes, onde os alunos trabalham em direção a metas matemáticas dentro de um problema contextual. Neste nível, os alunos ainda podem usar seus próprios simbolismos e modelos relacionados, independente dos rigores conceituais matemáticos e da configuração do problema contextual. O **nível referencial** envolve a construção de modelos baseados na configuração inicial da tarefa. Os modelos pensados inicialmente são ajustados de acordo com o problema contextual. No **nível geral** os modelos construídos não dependem da configuração da tarefa original. Finalmente, o **nível formal** envolve um raciocínio com simbolismos convencionais que reflete uma nova realidade matemática perante o problema contextual inicialmente posto.

3. Caminho Metodológico

A pesquisa está caracterizada com uma abordagem qualitativa, pois ao aprofundar reflexões e discussões sobre o ensino de matemática por investigação nas escolas do campo, escolhemos como questão central as problemáticas enfrentadas pelos educadores para ministrar aulas com os conteúdos de geometria analítica no Ensino Médio. Deste modo, a Educação Matemática Realística mostrou-se como uma base teórica acessível por trazer a possibilidade de abordar um fenômeno da realidade dos estudantes para assim preencher a lacuna entre os conhecimentos informais e a matemática formal, com isso, optou-se por trabalhar em sala a prática do plantio de maracujá (*passiflora edulis*), fazendo com que os estudantes desenvolvessem os conhecimentos geométricos a partir de uma situação real até chegarem num nível formal da matemática escolar.

Então, o contexto da pesquisa ocorreu com a exploração do fenômeno de estudo através de visitas sistêmicas, objetivando coletar informações sobre o plantio de maracujá por meio de discussões e vídeo filmagem. A propriedade rural onde ocorreu a investigação está localizada no entorno do PA Castanhais Araras, município de São João do Araguaia-PA, pertencendo a uma moradora local que utiliza a extração da polpa do maracujá como atividade econômica destinada à aquisição de renda extra a manutenção do núcleo familiar.

Ao coletar os dados sobre a plantação de maracujá foi produzido um vídeo no estilo de tutorial didático para apresentar e problematizar a situação em sala com os alunos, na Escola Estadual de Ensino Médio Dr. Abel Figueiredo, sediada no município de São João do Araguaia-PA. Então, analisando o perfil do público atendido pela escola, percebemos que mais de 50% dos estudantes são oriundos ou têm fortes vínculos com a zona rural, propiciando assim, uma assimilação dos conhecimentos matemáticos de geometria analítica a partir de problematizações contextualizadas por meio da plantação de maracujá.

Considerando os conteúdos programáticos a serem trabalhados no Ensino Médio com relação às demandas do projeto, escolheu-se trabalhar com a turma do 3º ano que também se encaixa nas especificidades da escola. Logo, na realização da intervenção participaram um total de 10 alunos presentes durante as aulas, ocorrendo no período de uma semana para preparação metodológica e aplicação em sala.

3.1. Estratégias pedagógicas

A pesquisa se estabeleceu de forma que os passos metodológicos foram construídos e analisados seguindo a Teoria de Designer Instrucional da Educação Matemática Realística a

partir da heurística dos modelos emergentes, objetivando apresentar contribuições ao processo de ensino e aprendizagem.

O designer instrucional foi desenvolvido conforme os modelos emergentes da EMR no ensino dos tópicos de geometria analítica propostos durante a intervenção em sala de aula. As ações ocorreram considerando as necessidades da turma, trabalhando na perspectiva de apresentar uma tarefa de suporte para atingir os objetivos de aprendizagem e, com isso, desenvolver os conceitos em estudo de geometria analítica. Observe a tabela:

Tabela 2. Designer Instrucional desenvolvido considerando a Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o ensino de Geometria Analítica

Objetivo de Aprendizagem	Conceitos	Tarefa de Suporte
Compreender elementos do plano cartesiano	Ponto, plano e eixos	Observar o processo de gabaritação de terra na plantação de maracujá e modelar a situação matematicamente.
Representar pontos no plano cartesiano	Pares de coordenados	Observar o processo de gabaritação de terra na plantação de maracujá e modelar a situação matematicamente.
Definir Distância e alinhamento entre pontos	Distância entre dois pontos e alinhamento entre três pontos	Problema Contextual de 2ª ordem

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

As tarefas de suporte foram vinculadas aos princípios da Educação Matemática Realística, considerando nossos objetivos de aprendizagem. Essas tarefas consistiram na apresentação de uma prática sociocultural do campo aos alunos participantes: **a gabaritação de terra⁴** na prática do plantio de maracujá, onde a partir dela, elaborou-se o problema contextual de 2ª ordem.

3.2. Roteiro metodológico de intervenção

O processo de ações realizadas em sala de aula buscou seguir passos bem definidos para assim alcançar os objetivos da pesquisa, vejamos:

1- Apresentação aos alunos do plantio de maracujá através de vídeo filmagem como sendo uma prática da realidade campesina, onde se deu maior ênfase ao fenômeno da gabaritação

⁴ A gabaritação de terra é o processo pelo qual se define ou prepara a terra com dimensões específicas para implementação de uma cultura.

de terra. O vídeo foi produzido para compor o material didático a ser utilizado em sala.

2- Abrir um momento de discussões para os alunos expressarem oralmente o que compreenderam sobre o fenômeno exposto, no intuito de proporcionar construções mentais das primeiras relações matemáticas.

3- Trazer problematizações para as discussões dos alunos sobre os conhecimentos geométricos presentes na plantação de maracujá, objetivando desenvolver em nível mais abstrato os conceitos de ponto, plano, eixo, plano cartesiano e, pares de coordenadas.

4- Construção de maquete em grupos representando o fenômeno da gabaritação de terra na prática do plantio de maracujá, como forma dos alunos estarem colocando em prática o conhecimento geométrico desenvolvido nos passos anteriores.

5- Fazer a problematização dos conceitos geométricos em estudo a partir da maquete representativa da gabaritação de terra para assim se aproximar de um nível mais geral da matemática escolar.

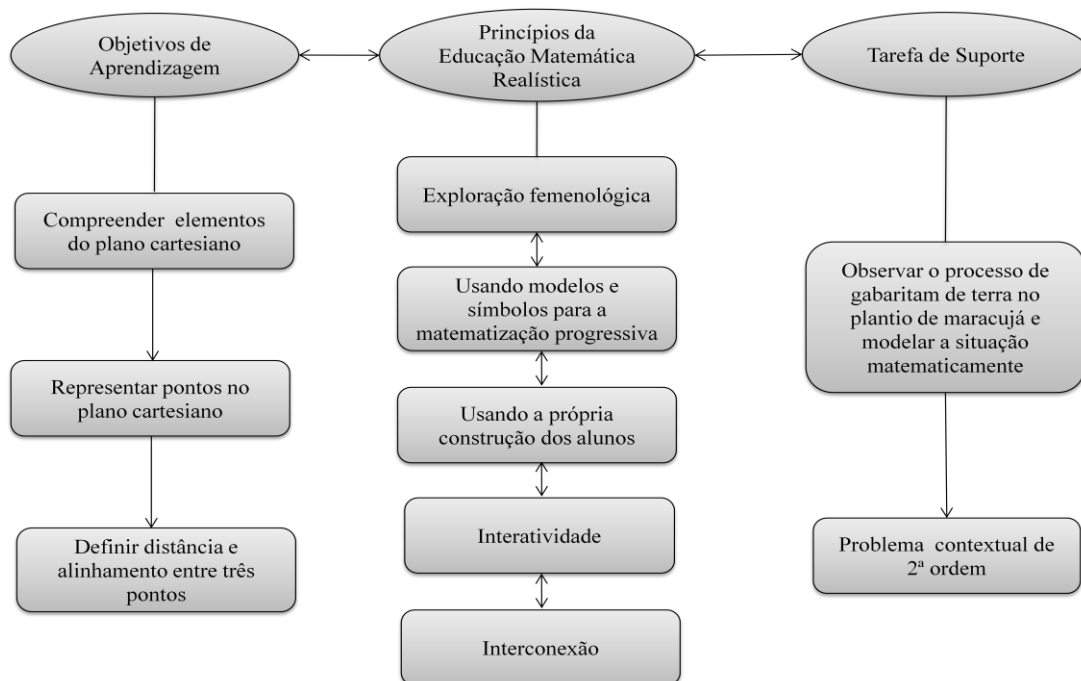
6- Demonstração no quadro das fórmulas necessárias para efetuar o cálculo de distância entre dois pontos e alinhamento entre três pontos através de problematizações contextualizadas ao fenômeno em estudo.

7- Aplicação de questionário sobre a distância entre dois pontos e alinhamento de três pontos com contextualização extraída do problema contextual.

4. Discussões e Resultados

No decorrer da intervenção em sala os alunos foram instruídos a construir modelos, nos termos propostos por Zandieh e Rasmussen (2010), na medida em que os conceitos de plano cartesiano, distância e alinhamento entre pontos, relação entre eixo e pares de coordenadas foram sendo desenvolvidos em sala de aula. O fluxograma abaixo ilustra de modo simplificado as relações estabelecidas no designer instrucional.

Figura 3. Fluxograma demonstrativo das relações entre os princípios da EMR e os objetivos de aprendizagem e tarefas de suporte



Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Em análise ao fluxograma, consideramos que os princípios da Educação Matemática Realística foram atingidos durante a intervenção em sala de aula. Então, vejamos como ocorreu:

Tabela 3: Princípios da EMR e como foram atingidos durante a intervenção em sala

Princípios da EMR	Como se atingiu
Exploração fenomenológica	Na exposição do vídeo tutorial apresentando o fenômeno em estudo (a gabaritação de terra na prática do plantio de maracujá), deste modo, os alunos tiveram contato com uma situação experiencialmente real.
Uso de modelos e símbolos para matematização progressiva	A partir do momento que os alunos começaram a desenvolver os conceitos geométricos em estudo provenientes da exploração do problema contextual, sendo mais notório nos momentos de discussões e problematizações sobre a temática, assim possibilitou uma evolução natural do conhecimento.
Uso da própria construção dos alunos	Na exploração do fenômeno em estudo durante a construção da maquete, pois os alunos puderam estar organizando de diferentes modos. E nas discussões e problematizações onde se partiu do conhecimento dos estudantes para se alcançar níveis mais formais.

Interatividade	No processo de realização de todas as ações planejadas para acontecerem em sala de aula, com maior ênfase durante a construção da maquete representativa da gabaritação da terra na prática do plantio de maracujá, instigando os alunos a aplicarem os conhecimentos geométricos em desenvolvimento a partir de uma situação propícia para proporcionar a aproximação de modelos mais gerais da matemática. Nesse momento foram formados grupos de trabalho.
Interconexão	Quando os alunos precisaram mobilizar outros domínios da matemática para resolver as situações problemas de cálculo de distância entre dois pontos e alinhamento entre três pontos, utilizando recursos como a fórmula para calcular a distância fazendo relação com o teorema de Pitágoras, o cálculo de determinante através de matrizes 3x3 (a Regra de Sarrus) para determinar o alinhamento dos pontos. Assim, no estudo de geometria analítica a interconexão apresenta-se como uma ferramenta presente em todos os processos ao juntar a álgebra com a geometria.

Fonte: Autores, 2019.

Ao compreender o método como se atingiu os princípios podemos perceber que os caminhos metodológicos utilizados no decorrer da pesquisa colaboraram significativamente para deixar mais evidente as contribuições da Educação Matemática Realística no processo de ensino de Geometria Analítica em escolas rurais no Ensino Médio.

Logo, o desenvolvimento dos conceitos de Geometria Analítica emergiu através do problema contextual sobre a gabaritação de terra na prática do plantio de maracujá. O problema a seguir se classifica como um problema contextual de segunda ordem, nos termos discutidos anteriormente onde o estudante é confrontado com uma situação realística e dele é esperado que encontre ferramentas matemáticas para organizar, estruturar e resolver a tarefa.

4.1. Problema Contextual

As mudas de maracujá antes de crescerem, necessitam serem plantadas próximas de estacas de madeira com espaçamento uniforme e que recebem no seu topo fios de arame que seguem uma única direção para assim o maracujazeiro se desenvolver facilmente. Este método de seguir uma uniformidade é denominado de “gabaritar a terra”, sendo que de uma estaca para a outra as distâncias são equivalentes.

Figura 4. Gabaritação de terra: na esquerda, o processo no qual se fincam as estacas no solo seguindo uma uniformidade de distância entre elas; na direita, as mudas prontas para a colheita.



Fonte: material empírico da pesquisa, 2019.

Durante o procedimento de gabaritação da terra, a distância de fixação das estacas é de 2m (metros) uma da outra. Deste modo, facilitando o processo de desenvolvimento das mudas até a coleta dos frutos.

A partir da exploração desta característica específica do plantio de maracujá foi coletado informações para servir de base nos estudos, fomentando os primeiros modelos emergentes de organização. A seguir, analisamos as fases do designer instrucional a partir dos níveis dos modelos emergentes (situacional, referencial, geral e formal), no intuito de focalizar na contribuição do processo para a transição de raciocínios intuitivos e informais para modos de raciocínios mais sofisticados e formais.

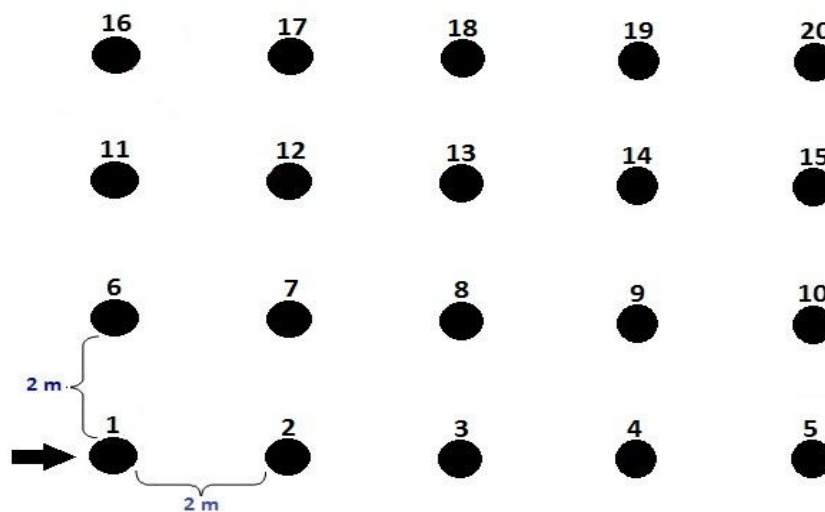
4.2. Nível Situacional

Considerando os modelos emergentes, o nível situacional foi obtido a partir do engajamento dos alunos nessa observação inicial do vídeo didático, traduzindo em um problema contextual. Tratou-se da exploração fenomenológica, nos termos dos princípios da EMR, onde as situações são experiencialmente reais para os alunos, destinados a apoiar um processo de formalização conceitual a partir de raciocínios informais. Como uma atividade rica na geração de uma matematização horizontal, os alunos foram convidados a assistir e descrever o ambiente da plantação de maracujá, tentando observar entidades matemáticas gerais que mais tarde seriam discutidas. Neste Designer Instrucional, a matemática convencional pode ser reinventada, gerando oportunidade de uma matematização progressiva.

4.3. Nível Referencial

Em um segundo momento foi solicitado aos estudantes que observassem a disposição das estacas no solo, considerando a visualização do vídeo, e construísem uma representação sobre isso. O modelo a seguir foi definido pelos estudantes, sendo que cada estaca foi representada por uma “bolinha preta”, numerada de 1 a 20, imaginando uma visualização aérea do plantio de maracujá. Nesse modelo, foi considerado um pequeno plantio com 20 pés de maracujazeiro, equidistantes 2 metros um do outro, conforme se observa abaixo:

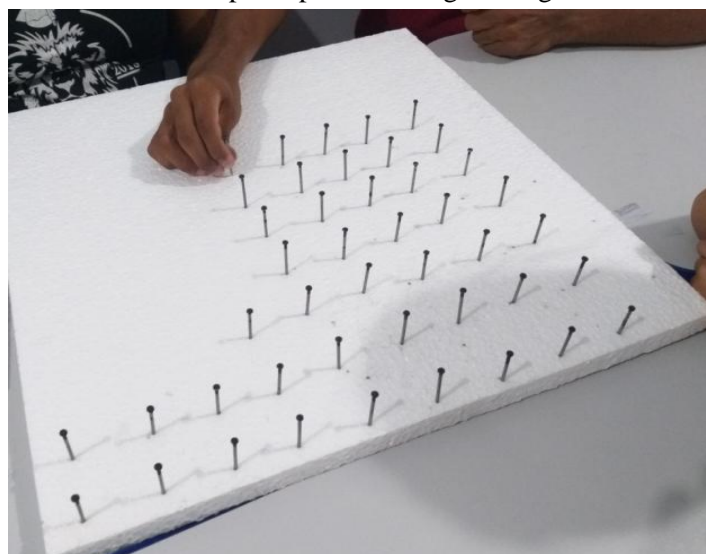
Figura 5. Modelo esquemático representando as estacas para o plantio de maracujá.



Fonte: Autores, 2019.

A figura a seguir, mostra o modelo desenvolvido pelos estudantes durante a intervenção em sala de aula, vejamos:

Figura 6. Modelo esquemático construído pelos estudantes representando o posicionamento das estacas após o processo de gabaritação.



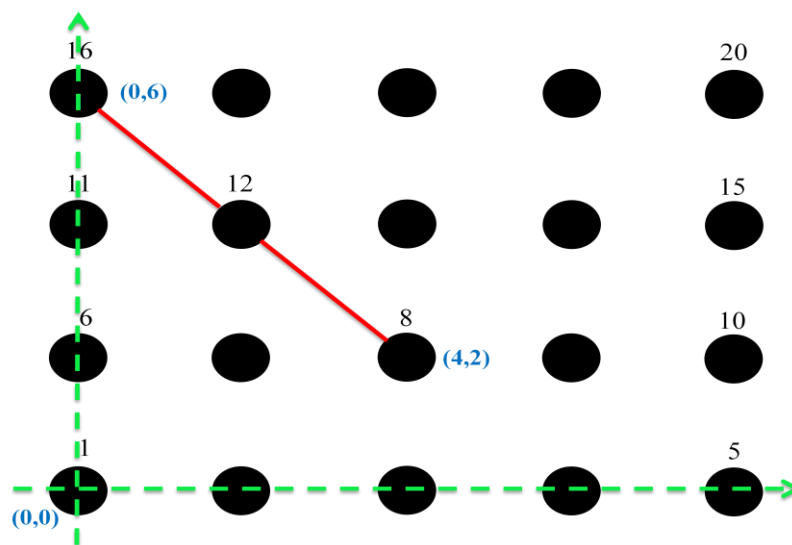
Fonte: Autores, 2019.

A partir dessa construção, observa-se que o nível referencial foi atingido pelos estudantes, a partir da construção de um modelo esquemático, baseadas nas configurações iniciais do problema contextual: o posicionamento das estacas da plantação de maracujá.

4.4. Nível Geral

Com base no modelo esquemático anterior, os alunos foram convidados a imaginar esses pontos em um plano de eixos cartesianos, ampliando a ideia do modelo situacional para um modelo mais geral. Desse modo, passou-se a compreender os pontos numa perspectiva de plano cartesiano, um modelo que já não dependia somente do problema contextual inicialmente dado, alcançando segundo os modelos emergentes, o nível geral, em uma evolução de raciocínio matemático.

Figura 7. Modelo esquemático considerando o plano de eixos cartesianos.



Fonte: Autores, 2019.

Neste modelo esquemático, cada estaca representa um ponto, e a terra, o plano. Com o auxílio de um sistema de eixos associados a um plano, faz-se corresponder a cada ponto do plano um par de coordenada e vice-versa.

4.5. Nível Formal

A abordagem adotada para se alcançar o nível formal, segundo os modelos emergentes, partiu de situações-problemas, baseadas no problema contextual inicialmente dado. No nível formal, os alunos raciocinaram sobre os conceitos da geometria analítica,

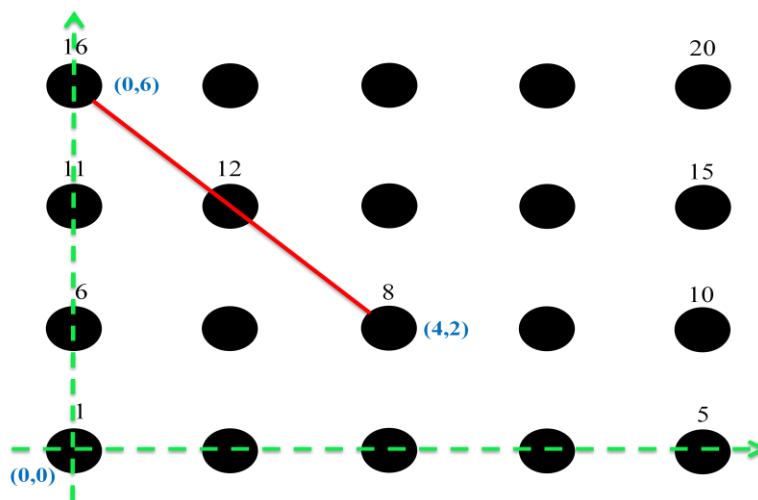
usando notações convencionais, a partir de uma reinvenção guiada pelo professor. Para isso, foram trabalhados durante as aulas os dois tópicos de geometria analítica já discutidos anteriormente, no intuito de fornecer material de suporte ao processo investigativo.

Os nomes dos sujeitos que constam nas sessões problemas a seguir são fictícios, sendo que todas as atividades enunciadas nesse estágio foram realizadas em sala de aula e os alunos já tinham um conhecimento prévio sobre os tópicos de geometria analítica estudados na intervenção.

4.6. Situação problema 1- Distância entre dois pontos:

Supondo que pretendemos determinar a distância entre Ismael e Tiago funcionários que trabalham na plantação de maracujá fazendo a coleta. Ao saber que os mesmos estão posicionados nas estacas 16 e 8, respectivamente, como podemos observar na figura. Qual seria essa distância?

Figura 8. Modelo esquemático de distância entre os dois pontos.



Fonte: Autores, 2019.

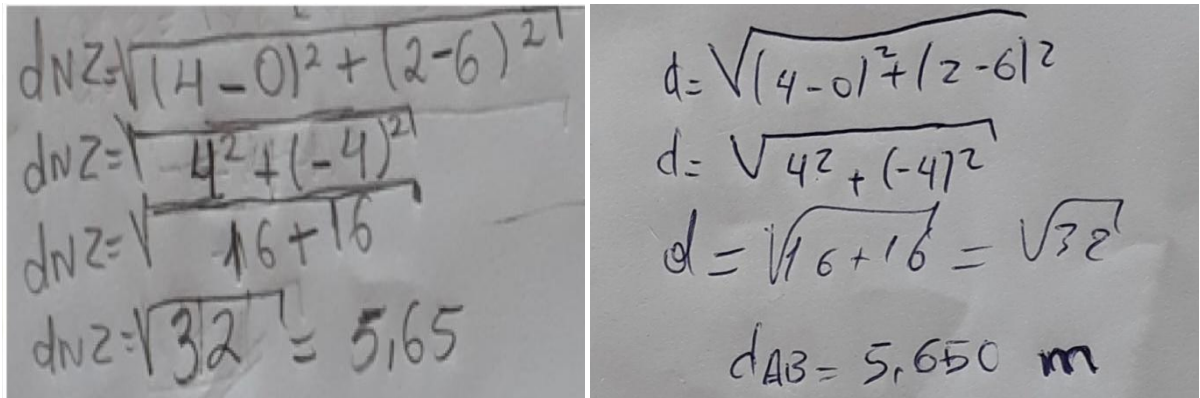
Os alunos, ao traçar dois eixos imaginários correspondentes aos eixos das ordenadas e abscissas, na representação do plantio de maracujá, foram questionados sobre qual seria a distância entre Ismael e Tiago, conforme é apresentado na situação problema, estando nos pontos (0,6) e (4,2), respectivamente.

Sabendo-se que a distância entre dois pontos, é dada pela equação:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

Os alunos desenvolveram a resolução do problema da seguinte forma:

Figura 9. Resolução do problema desenvolvida por dois estudantes, aluno A à esquerda e aluno B à direita.



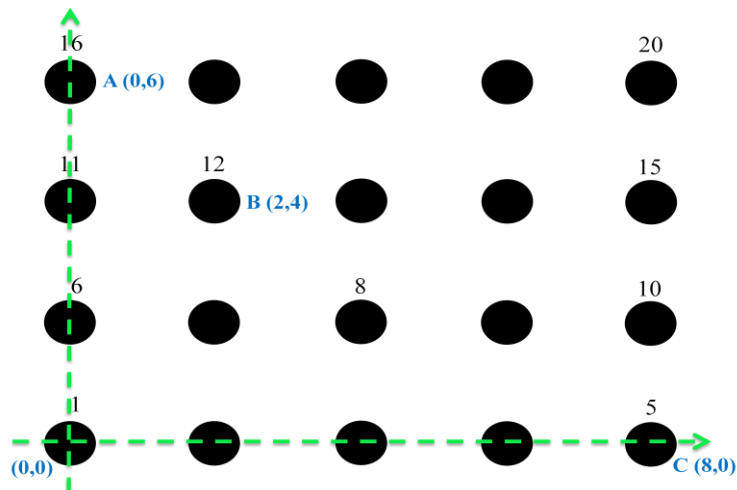
Fonte: material emprórico do estudo, 2019.

Ao efetuarem os cálculos, obtiveram como resposta 5,6568, ou seja, a distância entre Ismael e Tiago é de, aproximadamente, 5 metros e 65 centímetros.

4.7. Situação problema 2- Alinhamento de três pontos

Imagine a situação: Ismael, Tiago e Mateus, estão coletando os frutos do maracujá, e cada um está em uma determinada estaca. Sabendo que Ismael está na estaca 16, Tiago na estaca 12 e Mateus na estaca 5. Considerando que os funcionários tem que trabalhar de forma alinhada para um melhor rendimento da colheita, diminuindo assim o tempo de coleta e aumentando a produtividade . Vamos ajudar Ismael, Tiago e Mateus verificando se os mesmos estão ou não alinhados na plantação de maracujá.

Figura 10. Modelo esquemático de alinhamento de três pontos.



Fonte: Autores, 2019.

Sabemos que, a partir de três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, eles estarão

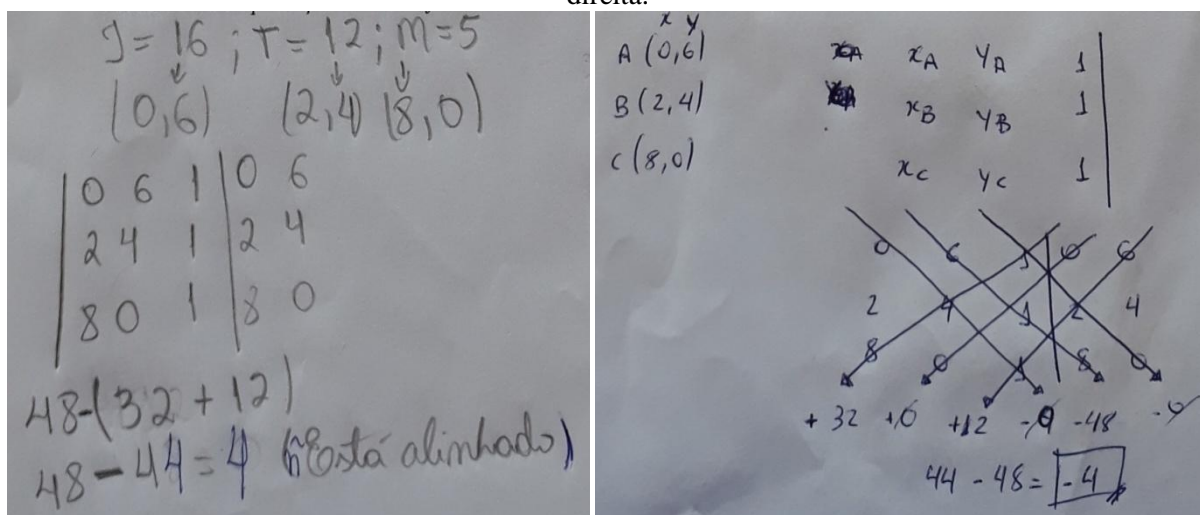
alinhados se, e somente se,
$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De acordo com a figura 10, os alunos identificaram os três pontos que representava a posição das estacas onde estavam os funcionários: estaca 16 (0,6), estaca 12 (2,4) e a estaca 5 (8,0). Para verificar assim se estes três pontos estavam alinhadas considerando a posicionamento no plantio, aplicamos a Regra de Sarrus na matriz formada com os pontos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Então, os alunos resolveram o problema da seguinte forma:

Figura 11. Resolução do problema desenvolvida por dois estudantes, aluno A à esquerda e aluno B à direita.



Fonte: material empírico, 2019.

Os alunos obtiveram como resposta o valor do determinante igual a 4, não satisfazendo a condição de alinhamento, pois seu valor teria que ser igual a zero ($\det = 0$).

Desta forma, ao analisarmos as duas situações problemas expostas anteriormente, podemos considerar que os alunos conseguiram utilizar a linguagem matemática apropriada para chegar ao resultado do problema, extraindo informações e utilizando estratégias informais (matematização horizontal), para então utilizar símbolos e algoritmos matemáticos convencionais (matematização vertical).

Portanto, ao articularmos nossas ações com os princípios da Educação Matemática Realística percebemos que a contribuição foi positiva para o processo de ensino dos tópicos de geometria analítica por apresentar uma metodologia própria que está na contramão dos

métodos tradicionais de ensino, fazendo um movimento de mobilização dos conhecimentos matemáticos presentes nas práticas socioculturais para o espaço escolar.

5. Conclusão

Duas práticas matemáticas específicas foram promovidas ao longo da abordagem empírica: i) a construção de um modelo de pontos em um plano, considerando as estacas do plantio de maracujá; ii) raciocínio sobre o plano cartesiano, incluindo a relação de eixos com pares de coordenadas. Uma interconexão entre vários domínios matemáticos foi favorecida, como uso de matrizes e determinantes, e conceitos primitivos da geometria plana, alguns naturalmente emergidos pela natureza do objeto matemático em questão: geometria analítica como o estudo da geometria plana e espacial em uma perspectiva algébrica.

Essas práticas matemáticas surgiram através de problemas contextuais sendo possibilitadas pelo ambiente de aprendizagem projetado pela EMR. Esse ambiente permitiu que os estudantes produzissem suas ideias, em um processo examinador e interacionista a fim de evoluir de níveis de entendimentos informais para raciocínios formais. Nesses termos, uma contribuição inicial vem mostrar que a EMR pode favorecer práticas e objetivos matemáticos e desenvolver o nível do entendimento conceitual.

Especificamente na abordagem dos problemas contextuais desenvolvidos, destacam-se alguns outros aspectos: (1) modelo textual com fins formativos conceituado em situações realísticas; (2) formulação de esquemas matemáticos possibilitados através dos enunciados; (3) Promoção didática-metodológica para explicação e resolução dos problemas. Tais destaques indicam a EMR e a heurística dos modelos emergentes como um designer instrucional significativo para o processo de ensino aprendizagem de Geometria Analítica no espaço de escolas rurais, superando, em termos de matematização, abordagens tradicionais de ensino.

Considerando que os caminhos metodológicos utilizados pelo professor em sala de aula afetam o rendimento escolar de seus estudantes, os princípios fundamentais da EMR ao referendarem o processo de construção das aulas do professor pautando no ambiente escolar os níveis de aprendizagem dos modelos emergentes favorece diretamente a perspectiva de determinado conhecimento matemático, promovendo raciocínios mais sofisticados e formais.

Ensinar geometria analítica partindo de contextos das práticas socioculturais desenvolvidas nas comunidades dos estudantes, portanto, se torna uma discussão plausível,

tendo em vista que na maioria das escolas rurais quando é apresentado o conteúdo de Geometria Analítica, mostra-se de modo técnico e abstrato.

O ensino de matemática nas comunidades rurais origina uma gama de produção de problemas contextuais realísticos, que possibilita à valorização dos saberes matemáticos intrínsecos as atividades cotidianas dos diferentes grupos sociais ali presentes e merecem maior apropriação teórica-metodológica por parte dos educadores. Assim, a Educação Matemática Realística pode ser uma via que possibilita a exploração didática.

REFERÊNCIAS

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW & OC, 1987.

FERREIRA, P. E., BURIASCO, R. L. Enunciados de Tarefas de Matemática Baseados na Perspectiva da Educação Matemática Realística. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, p. 452-472, 2015.

FERREIRA, P. E., BURIASCO, R. L. Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.18, n.1, pp. 237-252, 2016.

FREUDENTHAL, H. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. **Riedel Publishing Company**, Dordrecht, The Netherlands, 1983.

GRAVEMEIJER, K. P. E. **Developing Realistic Mathematics Education**. CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht, The Netherlands, 1994.

GRAVEMEIJER K. P. E. **How emergent models may foster the constitution of formal mathematics**. *Mathematical. Thinking and Learning*, 1, 155-177, 1999.

GRAVEMEIJER K. P. E.; STEPHAN M. Emergent models as an instructional design heuristic. In: Gravemeijer K, Lehrer R, Van Oers V, Verschaffel L, editors. **Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education**. Dordrecht (Netherlands): Kluwer Academic Publishers, p. 145–169, 2002.

RASMUSSEN, C., BLUMENFELD, H. Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. **Journal of Mathematical Behavior**, 26, p. 195–210, 2007.

TREFFERS, A. and GOFFREE, F. ‘Rational analysis of realistic mathematics education – the Wiskobas program’, in L. Streefland (ed.), **Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, OW&OC, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands, Vol. II, pp. 97–121, 1985.

TREFFERS, A. **Three Dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

TREFFERS, A. 'Didactical background of a mathematics program for primary education', in L. Streefland (ed.), **Realistic Mathematics Education in Primary School**, CD-β Press, Utrecht, pp. 21–57, 1991.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. The role of contexts in assessment problems in mathematics. **For the Learning Mathematics**, Alberta-Canadá, v. 25, n. 2, p. 2-9, 2005. Disponível em: <<http://www.fi.uu.nl/~marjah/documents/01-Heuvel.pdf>>. Acesso em: 18 de junho de 2018.

WAWROM, RASMUSSEN C, ZANDIEHM, et al. Design research within under graduate mathematics education: an example from introductory linear algebra. In: Plomp T, Nieven N, editors. **Educational design researchpart B: illustrative cases**. Enschede (Netherlands): Netherlands Institute for Curriculum Development, p. 905–925, 2013.

ZANDIEH, M., RASMUSSEN, C. Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. **Journal of Mathematical Behavior**, 29(2), p. 57-75, 2010.