



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE MARABÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS HUMANAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO DO CAMPO
CURSO DE LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO DO CAMPO**

RAILANNE DE JESUS VIANA

**TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD) E EQUAÇÕES DO
2º GRAU: Análises Ecológica e Praxeológica em livros didáticos de
Matemática de uma Escola do Campo**

**MARABÁ-PA
2019**

RAILANNE DE JESUS VIANA

**TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD) E EQUAÇÕES DO
2º GRAU: Análises Ecológica e Praxeológica em livros didáticos de
Matemática de uma Escola do Campo**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Educação do Campo com habilitação em Matemática na Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Gaia Assunção

Defesa pública em: ___/___/_____

Conceito: _____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto Gaia Assunção (Orientador)

Prof. Dr. Valdomiro Pinheiro Teixeira Jr

Prof. Dr. Marcos Guilherme Moura Silva

MARABÁ-PA
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Setorial Josineide da Silva Tavares

Viana, Railanne de Jesus

Teoria antropológica do didático (TAD) e equações do 2º grau: análises ecológica e praxeológica em livros didáticos de matemática de uma escola do campo / Railanne de Jesus Viana; orientador, Carlos Alberto Gaia Assunção. — Marabá: [s. n.], 2019.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Instituto de Ciências Humanas, Faculdade de Educação do Campo, Curso de Licenciatura em Educação do Campo, Marabá, 2019.

1. Álgebra. 2. Educação rural. 3. Livros didáticos - Análise. 4. Aprendizagem. 5. Matemática – Estudo e ensino. 6. Equações. I. Assunção, Carlos Alberto Gaia, orient. II. Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará. III. Título.

CDD: 22. ed.: 512

DEDICATÓRIA

Dedico essa conquista aqueles que, de certa forma, fazem parte dela. Ao meu pai Raimundo Fonseca Viana Sobrinho (in memoriam) que infelizmente não pôde vivenciar a realização do meu sonho, que também era o dele. Mas estará para sempre em minha memória e em meu coração, sua lembrança me inspira e me faz persistir.

Dedico também à minha mãe Alcina Rosa de Jesus pelo esforço de proporcionar uma boa educação, por todo apoio e incentivo para dar prosseguimento aos estudos. Se hoje consegui concluir esse curso, devo tudo a eles.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram para a construção deste trabalho. Por isso gostaria de expressar aqui minha gratidão a todos que, direta ou indiretamente, ajudaram para a realização desse sonho.

Agradeço a Deus por me proporcionar perseverança durante toda a minha vida e determinação para realizar meus objetivos.

Aos meus pais pelo apoio e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações. Sou grata também as minhas irmãs, Jéssica e Gessiane, pelo apoio.

Ao Curso de Licenciatura em Educação do Campo pelas oportunidades de experiências diversas, as quais me fizeram mudar a maneira de pensar e ver o mundo.

Ao corpo docente da Faculdade de Educação do Campo que contribuíram diariamente com seu conhecimento e dedicação, que foram importantes na minha trajetória acadêmica.

Ao meu orientador Carlos Alberto Gaia Assunção pela excelente orientação, por acreditar e exigir de mim mais do que eu imaginava ser capaz, isso me fez crescer significativamente.

Obrigada por me manter motivada durante todo o processo.

Aos meus colegas de turma pelas trocas de experiências e ajuda mútua, em especial a Edilene por estar sempre presente nos momentos difíceis com uma palavra de incentivo.

A todos os meus amigos que entenderam minha dedicação e ausência, obrigada por torcerem e vibrarem com essa conquista.

Agradeço a minha querida amiga Istéfani Ribeiro que, mesmo de longe, esteve sempre presente com palavras de incentivo e encorajamento.

A minha amiga Marinalva Lima por me auxiliar nos momentos que precisei e torcer por mim.

A toda a equipe da escola onde trabalho por proporcionarem todo o suporte para a minha permanência na faculdade e ausência nas minhas atividades lá.

Agradeço imensamente a todos!

OBRIGADA!

RESUMO

O trabalho apresenta resultados de análises ecológica e praxeológica sobre equações do 2º grau, de livros didáticos de matemática do 9º ano. Tem como objetivo analisar o lugar onde o objeto vive, o ambiente conceitual e a função desse objeto no sistema didático com o qual interage, no contexto da própria matemática e no contexto da Escola de Ensino Fundamental Tomaz Antônio Gonzaga em Novo Repartimento-PA; por consequência, caracterizar a organização praxeológica do objeto no seu *nicho e habitat*. Foi utilizado o modelo teórico-metodológico dos estudos de Márcia Varella (2010), que tem embasamento na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard (1999), mais especificamente os construtos conceituais da ecologia e da praxeologia de um objeto de saber matemático. Os resultados conclusos caracterizam a forma como o objeto está organizado nos livros didáticos; apresenta as ecologias das tarefas e técnicas no sistema didático, destacando as organizações do objeto de saber a ensinar e suas potencialidades técnicas em cada livro analisado. Resultados também apontam restrições tarefas restritivas dos livros que não se articulam com as práticas socioculturais do campo. Ressaltamos a necessidade de questionar o material didático utilizado, pois, de acordo com a perspectiva da educação do campo o conteúdo de construção do conhecimento escolar não deve ser desarticulado da realidade dos sujeitos. Para além disso, avançamos na estruturação desse modelo de Varella estabelecendo a relação institucional dessas análises com a perspectiva da educação do campo.

Palavras-chave: Álgebra; Teoria Antropológica do Didático; Análise de livros didáticos de matemática.

ABSTRACT

This article presents the results of a study on 2nd grade equations in textbooks based on an ecological and praxeological analysis of 9th grade textbooks of mathematics adopted at the Tomaz Antônio Gonzaga Elementary School in Repartimento- PA, located in rural areas. Whose objective is to analyze how the object lives the 2nd degree equations and for what purposes; how the proposed teaching tasks are organized and what elements can be characterized as a dialogue with the context of the field education, taking as a presupposition the tasks of teaching textbooks. We come to the data from an ecological and praxeological analysis of this mathematical object. We use the theoretical-methodological model based on the studies of Márcia Varella (2010), whose theoretical support is Yves Chevallard's (1999) Anthropological Theory of Didactics (TAD). The results obtained lead to the conclusion that the way an object is organized in textbooks directly influences student learning and that the tasks proposed in the books are not articulated with the socio-cultural practices of the field.

Keywords: Algebra; Anthropological Theory of Didactics; Analysis of math textbooks.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	9
2. REFERENCIAIS TEÓRICOS	10
2.1. Um pouco de história e conceito da Álgebra.....	10
2.2. Álgebra no Ensino Básico e Livros Didáticos.....	11
2.3. Construtos Teóricos das Análises ecológica e praxeológica segundo a TAD.....	13
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	16
3.1. O Método de Márcia Varella	17
3.1.1. Quadro 1: Análise Ecológica - questões norteadoras	18
3.1.2. Quadro 2: Análise Praxeológica - Questões e tarefas relacionadas.....	19
4. RESULTADOS E ANÁLISES	19
4.1. Análises Ecológica	20
4.1.1. Quadro 3: Objeto de saber nos documentos oficiais	20
4.1.2. Quadro 4: Objeto de saber nos livros didáticos.....	20
4.1.3. Quadro 5: Objeto de saber na instituição escolar	21
4.1.4. Quadro 6: O livro, o objeto de saber e a educação do campo, finalidade das tarefas.....	22
4.1.5. Quadro 7: Conceitos e Tarefas indispensáveis para o campo na perspectiva do professor	22
4.2. Análises praxeológicas dos livros didáticos LD1 e LD2.....	23
4.2.1. Quadro 8: Com relação a introdução ao conteúdo	23
4.2.2. Quadro 9: Conceitos trabalhados antes do uso de fórmulas	26
4.2.3. Quadro 11: Abordagem usada na descrição de conceitos	27
4.2.4. Quadro 12: Abordagem sobre propriedade, teorema, demonstração e prova	31
4.2.5. Quadro 13: Abordagem sobre propriedade, teorema, demonstração e prova usando método	33
4.2.6. Quadro 14: Abordagem sobre demonstração e prova	33
4.2.7. Quadro 15: Finalidades das tarefas e sua relação com o campo	38
4.2.8. Quadro 16: Conceitos e Tarefas indispensáveis para o campo nas tarefas	39
4.3. Síntese identificando elementos de uma praxeologia, segundo um objeto matemático	41
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
REFERÊNCIAS	45

TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD) E EQUAÇÕES DO 2º GRAU: Análises Ecológica e Praxeológica em livros didáticos de matemática de uma escola do campo

Railanne de Jesus Viana¹

Carlos Alberto Gaia de Assunção²

Resumo - O trabalho apresenta resultados de análises ecológica e praxeológica sobre equações do 2º grau, de livros didáticos de matemática do 9º ano. Tem como objetivo analisar o lugar onde o objeto vive, o ambiente conceitual e a função desse objeto no sistema didático com o qual interage, no contexto da própria matemática e no contexto da Escola de Ensino Fundamental Tomaz Antônio Gonzaga em Novo Repartimento-PA; por consequência, caracterizar a organização praxeológica do objeto no seu *nicho* e *habitat*. Foi utilizado o modelo teórico-metodológico dos estudos de Márcia Varella (2010), que tem embasamento na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard (1999), mais especificamente os construtos conceituais da ecologia e da praxeologia de um objeto de saber matemático. Os resultados conclusos caracterizam a forma como o objeto está organizado nos livros didáticos; apresenta as ecologias das tarefas e técnicas no sistema didático, destacando as organizações do objeto de saber a ensinar e suas potencialidades técnicas em cada livro analisado. Resultados também apontam restrições tarefas restritivas dos livros que não se articulam com as práticas socioculturais do campo. Ressaltamos a necessidade de questionar o material didático utilizado, pois, de acordo com a perspectiva da educação do campo o conteúdo de construção do conhecimento escolar não deve ser desarticulado da realidade dos sujeitos. Para além disso, avançamos na estruturação desse modelo de Varella estabelecendo a relação institucional dessas análises com a perspectiva da educação do campo.

Palavras-chave: Álgebra; Teoria Antropológica do Didático; Análise de livros didáticos de matemática.

Abstract - This article presents the results of a study on 2nd grade equations in textbooks based on an ecological and praxeological analysis of 9th grade textbooks of mathematics adopted at the Tomaz Antônio Gonzaga Elementary School in Repartimento- PA, located in rural areas. Whose objective is to analyze how the object lives the 2nd degree equations and for what purposes; how the proposed teaching tasks are organized and what elements can be characterized as a dialogue with the context of the field education, taking as a presupposition the tasks of teaching textbooks. We come to the data from an ecological and praxeological analysis of this mathematical object. We use the theoretical-methodological model based on the studies of Márcia Varella (2010), whose theoretical support is Yves Chevallard's (1999) Anthropological Theory of Didactics (TAD). The results obtained lead to the conclusion that the way an object is organized in textbooks directly influences student learning and that the tasks proposed in the books are not articulated with the socio-cultural practices of the field.

Keywords: Algebra; Anthropological Theory of Didactics; Analysis of math textbooks.

¹ Discente do Curso de Licenciatura em Educação do Campo (Área de Formação: Matemática) da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA). E-mail: railaneviana9@gmail.com

² Prof. Adjunto do Curso de Licenciatura em Educação do Campo na Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará. carlosgaia@unifesspa.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Estudos e Pesquisas voltados para o ensino de Matemática na escola básica, tem mostrado inúmeras dificuldades de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, a exemplo da Álgebra Básica. Mas, o campo teórico da Educação Matemática, tem produzido avanços na compreensão de vários fenômenos a partir da construção e uso de modelos teóricos-metodológicos, como é o caso de modelos desenvolvidos na Didática da Matemática.

No campo teórico da Didática da Matemática, buscamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD), no sentido de que ela nos ajudasse a compreender fenômenos que envolvem as organizações e tarefas, as condições e restrições em que se colocam os objetos matemáticos propostos para o ensino, isto é, e as condições e possibilidades de um *sistema didático*.

Durante o Curso de Licenciatura em Educação do Campo desenvolvemos pesquisas socioeducacionais e estágios de docências, onde presenciamos dificuldades dos alunos do ensino básico, com os conteúdos algébricos. Gerando inquietações, despertou a necessidade de saber mais sobre o ensino de Álgebra no ensino fundamental em uma escola do campo.

Partimos do pressuposto de que algumas das dificuldades poderiam estar relacionadas às organizações ecológicas e/ou praxeológicas inerentes aos materiais didáticos utilizados na escola, no caso o livro de matemática. Conforme Lajolo (1996), a utilização do livro didático faz com que ele determine conteúdos e condicione estratégias de ensino.

Diante disso nos propomos a temática deste trabalho discutindo alguns aspectos inerentes ao ensino e aprendizagem de conceitos de álgebra escolar, mais especificamente, equações do 2º grau; buscando entender como esses conteúdos estão organizados didaticamente, nos livros didáticos, para o ensino de matemática em uma escola do campo.

Assim sendo, colocamos como objetivo principal deste artigo, apresentar análises ecológica e praxeológica do objeto matemático equações do 2º grau, nos livros didáticos de matemática do 9º ano, utilizados em uma escola do campo. O instrumento principal de análise apoiou-se no modelo metodológico da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Na intenção de entender como esse objeto de saber aparece no livro e na escola pesquisada, colocamos alguns objetivos específicos: 1) caracterizar elementos que indiquem o lugar e o ambiente conceitual em que vive o objeto equações do 2º grau na escola Tomaz Antônio Gonzaga, município de Novo Repartimento-PA; 2) Identificar elementos que indiquem a funcionalidade do objeto de estudo nas tarefas propostas para o ensino-aprendizagem da matemática dos sujeitos do campo, na escola Tomaz Antônio Gonzaga.

2. REFERENCIAIS TEÓRICOS

Pensando em contextualizar historicamente a equação do 2º grau, discorreremos um pouco sobre a história e conceito da álgebra. Sem deixar de falar do livro didático, colocamos algumas reflexões teóricas sobre ensino de álgebra no ensino básico. Para fechar esse tópico apresentamos nosso principal referencial teórico e metodológico que é a concepção de Ecologia e Praxeologia, construtos teóricos da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard (1998), e cujo modelo metodológico será o de Márcia Varella (2010).

2.1. Um pouco de história e conceito da Álgebra

A Álgebra surgiu em 1800 a. c. no antigo Egito e na Babilônia com um sistema aritmético avançado que possibilitou fazer cálculos algébricos avançados para a época. Os babilônios eram infatigáveis construtores de tábuas, calculistas extremamente hábeis e certamente mais fortes em álgebra do que em geometria (EVES 2004), já resolviam perfeitamente qualquer equação de primeiro e segundo grau.

Ribeiro e Cury (2015) escrevem que séculos depois, Talles, utilizando-se do método de resolver equações, fez uma série de demonstrações do que hoje chamamos de Álgebra grega que era geométrica. É nessa época que a Álgebra muda de forma, deixa de ser aritmética e passa a ter um perfil mais geométrico.

Ainda na Grécia, Euclides de Alexandria escreveu uma obra enciclopédica reunindo toda a matemática axiomática, inclusive equações do 2º grau, que os gregos tinham desenvolvidos ao longo dos séculos. É nessa obra que a matemática é vista como uma ciência dedutiva, onde tudo tem de ser provado a partir de um conjunto de afirmações; séculos depois Diofanto de Alexandria é considerado o maior algebrista da Grécia (BOYER 1978).

Conforme Baumgart (1992) a origem da palavra “álgebra” é uma variante latina da palavra árabe al-jabr usada no título do livro al-kitab al-mukhtasar fe hisab al-jabr wal-mal-muqabala escrito em 825 pelo matemático árabe Muhammad ibn-Musa al-khwarizmi (780-850). Primeiro livro de álgebra, não sendo um conjunto geométrico, mas sim com problemas que envolvem números, utilizava da propriedade das operações. Este mesmo autor deu origem a palavra algarismo, derivada do seu nome al-khwarizmi. Ribeiro e Cury (2015), aborda que é nesse livro de al-khwarizmi que aparecem alguns métodos para resolver equações polinomiais de 1º e 2º graus com coeficientes numéricos pela primeira vez e de forma organizada.

Kaput (2008) conceitua álgebra como um elemento cultural e que é uma atividade humana pensar algebricamente. Para Piaget e Garcia (*apud* FIORENTINI, MIORIM & MIGUEL, 1993) a Álgebra é “a ciência das estruturas gerais comuns a todas as partes da

Matemática, incluindo a Lógica” (p. 83). Lins e Gimenez (1997) afirmam que a Álgebra consiste em um conjunto de ações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações.

Na base desta análise Souza e Diniz (1994) definem a álgebra como “a linguagem da matemática utilizada para expressar fatos genéricos” (p.4). Por outro lado, o Minidicionário Luft (2000) diz que Álgebra é a área da Matemática que faz uma generalização das questões aritméticas com representações de quantidades por meio de símbolos.

Ribeiro e Cury (2015) fazem um panorama de pesquisas realizados por vários pesquisadores – Ribeiro (2001), Dreyfus e Hoch (2004), Lima (2007) e Dorigo (2010) - sobre o desempenho de alunos envolvendo conceitos de Álgebra. Indicam que estudantes ao concluir a escolaridade básica, não são capazes de apresentar uma caracterização para esse conceito evocando apenas os procedimentos e técnicas de resolução, não reconhecem as estruturas básicas desse campo algébrico.

Portanto, do ponto de vista do ensino escolar entendemos que a Álgebra é um dos campos da matemática que exerce grande importância na grade curricular escolar. Com isso é impossível negar a importância da Álgebra em seu contexto de ensino e aprendizagem no ensino básico. No entanto, tem sido um campo da matemática de difícil compreensão pelos alunos.

2.2. Álgebra no Ensino Básico e Livros Didáticos

É indiscutível a importância da Álgebra no ensino escolar. Uma compreensão mais atual da álgebra, segundo Ribeiro e Cury (2015) é que ela pode ser compreendida como um dos ramos da matemática que serve de auxílio para a compreensão de vários outros saberes matemáticos, e que ela está presente no currículo escolar. Mas, a presença da álgebra por si só no currículo escolar não garante a compreensão de outros saberes nem a sua eficácia no ensino quando o assunto é livro didático.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs 1998) enfatizam que o ensino de álgebra na escola, ocorre sem ampliação das habilidades de abstração e generalização, sendo que se criam estratégias para memorizar dados meramente por meio da manipulação mecânica dos símbolos algébricos. Procedimento que cria no aluno uma falsa impressão de facilidade, que serão logo esquecidos.

Imenes e Lellis (1994) destacam sobre esses sofrimentos enfrentados por professores e alunos quanto aos conteúdos de Álgebra no ensino escolar. Em que professores tentam explicar e alunos tentam aprender as técnicas de cálculo com letras, muitas vezes sem significados. E

acrescenta ainda, que até mesmo em escolas de excelência, onde aparentemente os estudantes sabem todas as técnicas desse saber, ainda esse empenho tem pouco resultado.

Autores que seguem essa mesma linha de argumentação, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) ressaltam que o conteúdo de Álgebra é desenvolvido de forma mecânica e automática desprovido de significação social e lógica, induzindo a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões.

Ribeiro e Cury (2015) discutem sobre essas dificuldades enfatizando que a álgebra “deveria ser explorada desde os anos iniciais do ensino, pois dela faz um conjunto de processos e pensamentos que têm origem em experiências com números, padrões, entes geométricos e análise de dados” (p. 11).

Retornamos aos PCNs (1997) para dizer que “(...) se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados” (p. 117). No entanto, a escola reclama que não se materializa uma aprendizagem significativa propiciando ao estudante capacidades de contextualizar esse saber, mesmo que seja dentro da própria matemática utilizando os materiais didáticos do saber.

Por exemplo, o livro didático ainda é considerado um eficaz instrumento didático de trabalho para a atividade docente e para a aprendizagem dos alunos, segundo a Secretaria de Educação Básica (BRASIL, 2008, p.5), no entanto, se mal utilizado pode não ser tão eficaz.

Varizo (1999) ressalta a ideia de que o processo de ensino aprendizagem está influenciado diretamente com o livro didático, pois é a partir desse recurso que o professor escolhe a forma como os conteúdos serão abordados e quais os conteúdos que serão trabalhados. Com base na concepção de Varizo é possível dizer que o livro didático deve ser um instrumento de apoio ao trabalho pedagógico do professor. No entanto, este deve lançar mão de materiais bibliográficos e didáticos a serem utilizados no ensino de matemática, desde que compreenda minimamente a sua *organização didática e matemática*.

Por isso, pressupomos que: 1) um dos fatores contribuintes para tais dificuldades pode estar na forma como o livro didático organiza as tarefas de ensino e na forma como o professor o utiliza em suas aulas, como principal recurso acessível para ministrar suas aulas; 2) Por sua ampla utilização em um espaço e tempo em que a organização praxeológica do livro não atende os princípios educativos da educação do campo. Além, de que, na maioria das vezes, este recurso proporciona conteúdos apresentados de forma inóvia com explicações técnicas e como prática lista de exercícios, tornando limitador a construção do saber.

Não discordamos do uso frequente ou não do livro didático como um dos principais organizadores do *texto do saber* no processo de ensino. Recurso que possui uma organização didática e matemática pronta e acabada à disposição do professor, mas esta pode ser uma problemática carregada de obstáculo para o ensino de matemática, principalmente nas escolas do campo.

Teoria Antropológica do Didático – TAD, segundo Chevallard (1992), tem se mostrado uma ferramenta poderosa para analisar práticas docentes e livros didáticos, com base no modelo proposto pela TAD sobre as noções de organização praxeológicas, entre outros, por estudar as condições de possibilidades e funcionamentos de *sistemas didáticos*. Para melhor entendimento dos aspectos dessa teoria iremos abordar no tópico a seguir alguns elementos importantes da TAD. Em especial a análise ecológica e a análise praxeológica, pois entendemos ser fundamental para este trabalho.

2.3. Construtos Teóricos das Análises ecológica e praxeológica segundo a TAD

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi desenvolvida por Chevallard em 1992 e está relacionada a outras duas teorias criadas por esse matemático, que são: a Transposição Didática (TD) que consiste em estudar as transformações adaptativas em que um conteúdo do conhecimento passa até torná-lo ensinável. E a ecologia do saber, que se preocupa como um determinado objeto de saber vive em uma instituição, que de acordo com Chevallard (1991), essa instituição pode ser um país, uma escola, um livro didático, etc. Nesse sentido a TAD estuda o homem diante o saber matemático e as situações matemáticas, ou seja, posiciona a atividade matemática permitindo o seu estudo dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais.

A TAD, conforme descreve Chevallard, visa estudar e descrever as condições de existência dos objetos de saberes nas instituições de ensino, observando o homem diante desses saberes, em especial, os saberes matemáticos. Ou seja, permite analisar as situações de ensino e aprendizagem da matemática escolar. Diante disso, destacamos que em nossa pesquisa serão realizadas análises de documentos oficiais e em livros didáticos do objeto de saber equação do 2º grau.

Um dos construtos teóricos da TAD que vamos usar nessa pesquisa é a análise ecológica, com o intuito de estudar o objeto matemático, equação do 2º grau, presentes em livros didáticos em uma instituição escolar no campo, ou seja, pretendemos fazer uma análise de como esse objeto de saber aparece no livro e na escola pesquisada, qual o lugar onde o objeto vive conceitualmente e a sua funcionalidade no sistema didático.

A análise ecológica do saber diante do olhar da Didática da Matemática, diz respeito aos questionamentos sobre a existência ou inexistência de um dado conhecimento em uma determinada instituição onde se instala, ou seja, como esse conhecimento surge, como ele se mantém “vivo” e como deixa de existir. Desse modo, a ecologia possui termos bastante utilizados, tais como: *ecossistema*, que pode ser considerado como o ambiente em que se vive um conjunto de elementos; *habitat*, é o espaço que um determinado organismo ocupa nesse ecossistema; e *nicho*, é a função que esse organismo realiza no *habitat*, essas definições são destacadas por Odum (1988, *apud* FERNANDES & GUERRA, 2018).

Assim, a análise ecológica de um objeto de saber é organizada em torno de dois conceitos: o *habitat* que significa o lugar onde o objeto vive e ambiente conceitual desse objeto de saber, e o *nicho* que se refere à função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage.

Fernandes e Guerra (2018), explicam esses conceitos (*habitat e nichos*) para o campo didático ou matemático especificamente, os quais “os *habitat* são os ambientes conceituais onde um determinado objeto do saber matemático encontra-se e vivencia suas práticas”, isto quer dizer que, a equação do 2º grau é o nosso objeto de análise e o nosso *habitat* é o livro didático e a escola, onde esse saber se encontra; “e os *nichos*, por sua vez, contemplarão suas funcionalidades nas praxeologias que se evidenciam em relação a um objeto de ensino, ocorrendo em um dado *habitat* de um certo ecossistema”, ou seja, *nicho* é a função que a equação de 2º grau exerce sobre o livro didático e a escola (*habitat*).

Para Almouloud (2015), a ecologia refere-se às condições do bloco técnico-prático (tarefa/técnica) e sua construção e vida nas instituições de ensino que a produz, utiliza ou transpõe. Considerando as condições de “sobrevivência” de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o *habitat*? Qual o *nicho*? Qual o papel desse saber ou saber-fazer na “cadeia alimentar”? Tais respostas ajudam na compreensão da organização matemática determinada por uma praxeologia.

Concordamos e seguimos as questões colocadas por Almouloud (2015), sobre a análise ecológica: o objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica? Está presente nos livros didáticos? Como é apresentado e com qual finalidade? Esse objeto de saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser deixado de lado? As respostas a essas questões permitem identificar a razão de ser desse objeto de saber na instituição escolar.

O outro elemento da TAD que faz parte desta pesquisa é a *Análise Praxeológica* também desenvolvida por Chevallard (1998). Este autor define quatro conceitos básicos em que nomeia

de praxeologia ou organização praxeológica, tais como: tarefa (T), técnica (\hat{o}), tecnologia (θ) e teoria (Θ), isso diante da perspectiva de que toda atividade humana consiste em uma organização envolvendo esses conceitos [T, \hat{o} , θ , Θ].

De acordo com o princípio antropológico, tarefa (T) supõe em objetos bem precisos e que não são obtidos da natureza diretamente, mas sim são artefatos, obras, construtos institucionais como, por exemplo uma sala de aula (CHEVALLARD 1998). Por exemplo, andar de bicicleta, é um tipo de tarefa, no entanto simplesmente andar, assim isolado, não é. Da mesma forma que, determinar a solução de uma equação do 2º grau é um tipo de tarefa, mas calcular, assim isolado, não aponta o que deve ser feito exatamente. Neste caso a tarefa tem o objetivo bem definido que é encontrar as incógnitas x, assim, calcular o valor de uma equação é um tipo de tarefa.

Uma técnica (\hat{o}) é um jeito de fazer ou realizar uma tarefa (T), necessita de maneiras de realizar as tarefas $\hat{o} \in T$. Assim como destaca Chevallard (1998), uma praxeologia referente a um tipo de tarefa (T) necessita, em princípio, de uma técnica (\hat{o}) relativa. Contudo, esse mesmo pesquisador afirma que uma determinada técnica (\hat{o}) pode não ser suficiente para realizar todas as tarefas $\hat{o} \in T$. Uma vez que ela pode funcionar para uma parte das tarefas T e falhar para a outra parte. Isso significa que em uma praxeologia pode existir uma técnica superior a outras técnicas, ao menos no que pertence à realização de certo número de tarefas (CHEVALLARD). Em destaque, para resolver a tarefa, equação do 2º grau, a técnica usada é a determinação de Δ (delta).

A tecnologia (θ), é um discurso racional que tem duas funções essenciais que são a justificação e a explicação. O primeiro objetivo é justificar a técnica (\hat{o}), com o intuito de garantir que esta permita realizar as tarefas. O segundo objetivo da tecnologia consiste em explicar, tornar compreensível a técnica. Além disso, a tecnologia tem também a função de reproduzir novas técnicas, mais eficientes e adaptadas à realização de uma determinada tarefa (CHEVALLARD 1998). Usando o exemplo da equação do 2º grau citados anteriormente, podemos afirmar que uma das tecnologias empregadas para a determinação da técnica é a fórmula de Bháskara.

A teoria (Θ), por sua vez, tem por finalidade justificar e tornar compreensível uma tecnologia, bem como esclarecer o discurso tecnológico. Torna-se, então, a um nível elevado de justificação-explicação-produção. Deste modo, Chevallard (1998) adverte que normalmente essa habilidade de justificar e de explicar a teoria é quase sempre obscurecida pela forma abstrata como os enunciados teóricos são apresentados frequentemente.

Assim, de modo geral, para que uma tarefa seja realizada é necessário que ela esteja relacionada com uma técnica. Entretanto, para que essa técnica exista, é importante que ela atenda a condição de ser justificada é portanto, a tecnologia tem a finalidade de justificar a técnica. Logo, a teoria por sua vez, retoma a tecnologia, para justificação, explicação e produção da técnica empregada para a resolução da tarefa.

A Análise Praxeológica (didática e matemática), permite ao professor refletir sobre cada tarefa a ser trabalhada, com isso podendo fazer seleção e modificação dessas tarefas na tentativa de adaptar ao conteúdo trabalhado em sala de aula ou às dificuldades de seus alunos. Isto é, a análise praxeológica pode contribuir para a alteração de postura do docente em sua prática de ensino, logo possibilita observar com mais atenção as dificuldades e especificidades dos estudantes ao determinar uma tarefa ou os caminhos (técnicas) por eles selecionados se estão adequados.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O interesse pelo estudo sobre análises ecológica e praxeológica surgiram primeiramente das incursões durante as pesquisas socioeducacionais do tempo comunidade do curso de Licenciatura em Educação do Campo. E a possibilidade de utilizar a abordagem teórico-metodológica de Márcia Varela (2010), decorreram de contatos com aspectos teóricos da disciplina Didática da Matemática estudada em um dos tempos universidade.

Durante um dos estágios de observação do curso de Licenciatura em Educação do Campo, acompanhei várias aulas em que era ensinado álgebra básica no ensino fundamental na escola Tomaz Antônio Gonzaga, município de Novo Repartimento-PA. De um lado, muito me incomodava a dificuldade visível nos alunos para aprenderem conceitos de equações, por exemplo, e para além disso me inquietava saber como os livros didáticos, bastante utilizado pelo professor dessa escola, abordavam a diversidade e a valorização dos saberes do campo, através do ensino de equações.

Por outro lado, queria saber como vive esse objeto de saber matemático nos livros didáticos de matemática utilizados na escola? Como ele aparece organizado para o ensino? Que ou quais tarefas são colocadas para serem ensinados? Para além disso, saber se a obra apresenta nas tarefas relações entre o conhecimento escolar e o contexto sociocultural do campo? Para isso percebemos que seria necessário um modelo teórico-metodológico de análise das tarefas dos livros, por isso, o modelo teórico de Márcia Varela.

Para o suporte teórico-metodológico utilizamos o modelo de análise dos materiais didáticos dos estudos de Márcia Varella (2010). Que analisou como autores de materiais didáticos do Ensino Médio organizaram as tarefas propostas com provas e demonstrações no conteúdo “Geometria Analítica” para 3ª série do Ensino Médio, a partir da TAD. Essa análise consistiu em considerar as tarefas propostas pelos livros didáticos e cadernos bimestrais (adotados pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo em 2009), sobre o estudo da equação de uma reta. O aporte teórico utilizado pela autora foram os pressupostos da TAD de Yves Chevallard (1999), que trata das organizações praxeológicas Matemática e Didática.

Nosso trabalho tenta fundamentar-se nos pressupostos teóricos da TAD, mais especificamente nos critérios de análises ecológica e praxeológica, utilizado por Márcia Varella na sua dissertação. Analisamos os dois livros didáticos de matemática, no conteúdo de equação do 2º grau, do 9º ano, das coleções de matemática, aprovados pelo PNLD, dentre eles o livro *Praticando Matemática* (o qual chamaremos de LD1) dos autores: Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos do triênio atual (PNLD 2017, 2018 e 2019). E o livro *Matemática* (o qual chamaremos de LD2), de Luiz Roberto Dante do triênio anterior (PNLD 2014, 2015 e 2016).

A escolha do LD1 se deu em virtude de ser o material que está em utilização pela escola sendo o recurso efetivo do professor e também disponibilizado para o aluno e a seleção do LD2 pelo fato de ser da coleção anterior trabalhada na instituição, e também por ambos apresentarem os conceitos matemáticos concernentes a equações do 2º grau, a qual é o nosso objeto de estudo.

As observações sobre o nosso objeto de estudo se deram em dois momentos: no primeiro momento, nos livros didáticos LD1 e LD2, com base nos critérios de Varella (2010), conforme os quadros (1 e 2), e no segundo momento nossas observações se concentraram no sistema didático, em sala, onde o objeto matemático estava sendo trabalhado. Complementar a esse momento aplicamos um questionário ao professor de matemática (chamaremos de P1), com objetivo de saber o seu ponto de vista sobre a importância do estudo de equações do 2º grau, principalmente a alunos do campo.

3.1. O Método de Márcia Varella

Apresentamos a seguir dois quadros por Varella (2010). O quadro 1 contém 6 questões que podem ser feitas para a obtenção de dados referentes ao objeto pesquisado, no que se constitui a *análise ecológica* do objeto; onde o *habitat* é o lugar onde vive o objeto conceitualmente e o *nicho* refere-se à função desse objeto no ambiente onde vive, podendo se evidenciar suas possíveis relações com outros objetos.

3.1.1. Quadro 1: Análise Ecológica - questões norteadoras

Questões norteadoras por habitat e nicho		
1. O objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica?	Habitats (lugar onde o objeto vive e ambiente conceitual)	Nichos (à função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage)
2. Está presente nos livros didáticos?		
3. Como é apresentado e com qual finalidade?		
4. Esse objeto de saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser trabalhado ou deixado de lado?		
5. *Quais as finalidades das tarefas propostas sobre equações do 2º grau, nos livros didáticos de matemática e sua relação com as práticas sociais do campo?		
6. *Quais conceitos e tarefas propostas para o estudo da Equação do 2º grau são indispensáveis para o ensino e aprendizagem da matemática dos sujeitos do campo?		

Fonte: quadro construído a partir de Varela (2010) - *questão incluídas pelos autores.

O quadro 2 apresenta critérios de análise praxeológica proposto por Varela (2010, p.128), em que baseou-se em quatro questões que julgou relevante verificar ao que concerne o estudo das provas e demonstrações em conteúdos matemáticos. Essas questões ficam identificadas como Questão 1 (Q1), Questão 2 (Q2), Questão 3 (Q3) e Questão 4 (Q4). Utilizaremos o referido modelo de Varela (2010), para definirmos os critérios de análises da organização didática e possivelmente da organização matemática.

No entanto, é importante destacar que nossos estudos vão além do modelo proposto por Varela, ao inserirmos as questões 5 e 6. Pois, elas tratam de especificidades ecológicas para os objetos matemáticos; as questões foram incluídas porque julgamos que as questões de 1 a 4 não respondem sobre o *nicho* e o *habitat* desse objeto quando pensamos na perspectiva da Educação do Campo.

Para a referida autora, cada questão norteadora apresenta, pelo menos, uma tarefa a ser realizada tendo por justificativa as técnicas escolhidas pelos autores e que poderão ser mobilizadas pelos alunos. Os blocos tarefa-técnica e teórico-tecnológico serão explicitados, juntamente com as especificidades de cada uma das quatro questões. Varela identificou as tarefas pertencentes a cada uma delas e a simbologia utilizada nessa parte da pesquisa.

3.1.2. Quadro 2: Análise Praxeológica - Questões e tarefas relacionadas

Questões norteadoras	Tarefas relacionadas
Questão 1 (Q1): Qual a abordagem utilizada pelo autor para introdução ao conteúdo?	Tarefa1 (t1Q1): Apresentar parte introdutória à Equação
Questão 2 (Q2): Como os conceitos matemáticos que antecedem o estudo do uso de fórmulas são apresentados	Tarefa1 (t1Q2): Identificar quais conceitos são trabalhados precedentes ao estudo do uso de fórmulas.
	Tarefa2 (t2Q2): Identificar as abordagens utilizadas para descrever esses conceitos
Questão 3 (Q3): Na introdução aos conceitos que antecedem o Estudo da Equação são utilizados os termos propriedade, teorema, demonstração, prova, ou mesmo é feita alguma diferenciação entre eles?	Tarefa1 (t1Q3): Identificar a utilização dos termos nas tarefas executadas e propostas.
	Tarefa2 (t2Q3): Identificar se é apresentada alguma diferenciação entre os termos utilizados pelo método axiomático-dedutivo
Questão 4 (Q4): As tarefas propostas, voltadas ao estudo da Equação, apresentam demonstrações ou provas?	Tarefa1 (t1Q4): Identificar as tarefas propostas para o estudo da Equação
	Tarefa2 (t2Q4): Identificar, por meio das tarefas, a utilização de provas ou demonstrações.
Questão 5 (Q5): Quais as finalidades das tarefas propostas sobre equações do 2º grau, nos livros didáticos de matemática e sua relação com as práticas sociais do campo?	Tarefa 1 (t1Q5): identificar, por meio das tarefas, a relação do ensino de equações às práticas sociais do campo
Questão 6 (Q6): Quais conceitos e tarefas propostas para o estudo da Equação do 2º grau são indispensáveis para o ensino e aprendizagem da matemática dos sujeitos do campo?	Tarefa 1 (t1Q): Identificar a utilização de termos ou abordagens nas tarefas em que mostram a utilidade para os sujeitos do campo.

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

4. RESULTADOS E ANÁLISES

Neste tópico serão feitas as análises ecológicas das questões norteadoras por *habitat* e *nicho* e as análises praxeológicas das questões e tarefas relacionadas ao critério adotado por Varella (2010) relacionado ao objeto matemático equação do 2º grau presentes na escola e nos livros didáticos. Assim como também algumas observações gerais comparando esse objeto em ambos os materiais.

4.1. Análises Ecológica

Este sub tópico será dedicado aos estudos sobre a análise ecológica e o objetivo é mostrar o lugar onde este objeto está e qual a funcionalidade dele. Para isso vamos apresentar quadros com questões, construído a partir das questões do quadro 1, e também vamos trazer as respostas do professor para gerar os resultados.

4.1.1. Quadro 3: Objeto de saber nos documentos oficiais

Questão 1	O objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica?
Habitat	Sim. Está na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).
Nicho	A função da equação do 2º grau na BNCC e nos PCNs é que o estudante consiga ampliar o pensamento algébrico, estabelecer generalização e perceber regularidades;

Fonte: Construído pelos autores a partir de Varella (2010)

Observamos que o conteúdo equação do 2º grau faz parte das recomendações curriculares, destacadas em *habitat* no quadro acima. Está presente na BNCC atual na unidade temática sobre Álgebra que traz como funcionalidade desenvolver o pensamento algébrico “que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (BNCC 2018, p. 270). E para que esse pensamento seja trabalhado são sugeridas algumas habilidades a serem desenvolvidas para “resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados” (BNCC 2018, p. 270).

Também esse objeto está nos PCNs, abordado no item sobre orientações do estudo de Álgebra, e tem a funcionalidade de direcionar as habilidades a serem desenvolvidas. Julgou-se importante destacar parte da abordagem realizada nos PCNs, no qual enfatiza que “o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas” (BRASIL, p. 115, 1998).

Percebe-se também que este objeto não está no Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola, no entanto ele está presente no livro didático que os professores utilizam e os docentes também trabalham esse conteúdo em sala de aula, essas informações foram perceptíveis nas observações das aulas de matemática e nas entrevistas realizadas com os sujeitos da pesquisa.

4.1.2. Quadro 4: Objeto de saber nos livros didáticos

Questão 2	Está presente nos livros didáticos?
-----------	-------------------------------------

Questão 3	Como é apresentado?
Habitat	Sim. Em ambos os materiais analisados (LD1 e LD2).
Nicho	A principal funcionalidade é desenvolver a capacidade do aluno em resolver situações problemas, em ambos os livros.

Fonte: Construído pelos autores a partir de Varella (2010).

Observa-se que o conteúdo equação do 2º grau está presente em ambos os materiais observados. No LD1, na página 321 do livro referente ao manual do professor, está exposto que a funcionalidade deste objeto é “ampliar os conhecimentos de Álgebra, em particular os relativos a resolução de equações, usando-os para representar e resolver problemas”. Em LD2, na página 46 do manual do professor está destacado a função deste conteúdo que é “desenvolver as importantes capacidades de abstração e generalização do aluno, bem como muni-lo com uma importante ferramenta para resolver problemas”. Percebe-se que por meio dos objetivos do conteúdo citados nos manuais, ambos priorizam e dão destaque a resolução de problemas com o intuito de prepará-los para resolver diversas situações-problemas do seu cotidiano.

Nos livros didáticos pesquisados o objeto de saber é apresentado fazendo links com a geometria por meio de situações-problemas tentando proporcionar contextualização desse conteúdo. Além disso, também segue uma sequência cronológica na organização dos tópicos concernentes a equação do 2º grau, com a intenção de proporcionar uma lógica de sequência. Vale destacar, que ambos os livros apresentam várias maneiras de resolver equações de 2º grau, dentre as quais: por produto notável, pela fórmula de Bháskara, soma e produto das raízes.

4.1.3. Quadro 5: Objeto de saber na instituição escolar

Questão 4	Esse objeto de saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser trabalhado ou deixado de lado?
Habitat	Sim, é trabalhado na escola. Está nos livros didáticos que são utilizados nas aulas pelo professor de matemática e estudado pelos alunos.
Nicho	A funcionalidade deste saber na escola é preparar o estudante para receber futuros conteúdos que exigem habilidades sobre equações.

Fonte: Construído pelos autores a partir de Varella (2010)

Na pesquisa foram observadas duas aulas de matemática em cada turma do 9º ano, somando quatro aulas, e nessas aulas este objeto de saber estava sendo trabalhado efetivamente em sala de aula. Assim como também é encontrado no recurso utilizado pelo professor, o livro didático. De acordo com as entrevistas e observações das aulas sobre equações percebe-se que a principal funcionalidade que este objeto exerce na escola é a de preparar os estudantes para receberem conteúdo futuros os quais exigem habilidades sobre equações. Nas palavras do professor P1 destaca que “eles vão precisar desse conhecimento no ensino médio para avançar

nos estudos de funções, funções quadráticas. Então eu vejo como uma base para eles poder prosseguir nesta caminhada de estudos”.

4.1.4. Quadro 6: O livro, o objeto de saber e a educação do campo, finalidade das tarefas.

Questão 5	Quais as finalidades das tarefas propostas sobre equações do 2º grau, nos livros didáticos de matemática e sua relação com as práticas sociais do campo?
Habitat	LD1 e LD2
Nicho	Ampliar os conhecimentos sobre álgebra

Fonte: Construído pelos autores a partir de Varella (2010)

As finalidades das tarefas propostas sobre equações do 2º grau nos livros didáticos de matemática, consiste em “ampliar os conhecimentos de Álgebra, em particular os relativos a resolução de equações, usando-os para representar e resolver problemas” (LD1, manual do professor, p. 321).

Percebemos que as tarefas sobre equações do 2º grau nos livros didáticos não apresentam relação com as práticas sociais do campo, no sentido de dialogar com os aspectos culturais dos alunos. Exceto o LD1 que apresenta apenas um exemplo com a finalidade de motivar o aprendizado por meio de uma situação-problema. No entanto, são abordadas algumas tarefas com conexões da vida cotidiana dos estudantes por meio da geometria e problemas. Porém, não são suficientes para gerar uma aprendizagem contextualizada.

4.1.5. Quadro 7: Conceitos e Tarefas indispensáveis para o campo na perspectiva do professor

Questão 6	Quais conceitos e tarefas propostas para o estudo da Equação do 2º grau são indispensáveis para o ensino e aprendizagem da matemática dos sujeitos do campo?
Habitat	Vide respostas do professor
Nicho	A função deste objeto, segundo o professor, é de preparar o estudante para os conteúdos futuros, assim o conceito de equação torna indispensável para o ensino e aprendizagem da matemática.

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

De acordo com as respostas do professor entrevistado referente a questão acima identificamos os conceitos e tarefas propostas para o estudo da Equação do 2º são indispensáveis para o ensino e aprendizagem da matemática. O P1 destacou que o conceito de equação deve ser bem explorado para que o estudante possa ter uma aprendizagem rica e significativa. Já a respeito das tarefas, ele destacou que aproximar esse objeto da realidade do

aluno é uma das alternativas, embora não seja fácil. Acrescenta ainda que o livro didático proporciona contextualização por meio da geometria. Essas informações estão no fragmento da entrevista do P1, a seguir:

Com relação aos conceitos eu penso que o próprio conceito de equação, que se tu for fazer uma pesquisa e perguntar o que é uma equação do 2º grau possivelmente poucos alunos conseguem dizer o que é uma equação do 2º grau. Mas já resolver talvez eles conseguem que aprendem mecanicamente, então um dos principais conceitos é a definição do que é equação do 2º grau, qual a sua diferença com relação a equação do 1º grau; e com relação as tarefas propostas é geralmente a gente usa atividades do livro e tenta de alguma forma, não é simples, tá contextualizando... tenta de alguma forma tenta aproximar da realidade deles, do dia-a-dia deles inclusive até o próprio livro ele tenta fazer essa contextualização com a geometria (P1, 2019, p. 02).

De acordo com a fala acima, é possível perceber a preocupação do docente quanto ao ensino do conceito da equação do 2º grau, pois é a partir dele que o estudante cria suporte para a resolução dessas equações de forma significativa. Caso contrário, o aluno desenvolverá a resolução de forma mecânica sem ter consciência do processo realizado.

4.2. Análises praxeológicas dos livros didáticos LD1 e LD2

Neste tópico apresentaremos dados e análises praxeológicas sobre os livros LD1 e LD2. Primeiramente apresentamos a questão, em seguida as tarefas referentes a essas questões. Ao final das questões fizemos um apanhado geral com reflexões sobre a forma como esse objeto matemático está organizado nos dois livros.

4.2.1. Quadro 8: Com relação a introdução ao conteúdo


Questão 1 (Q1): Qual a abordagem utilizada pelo autor para introdução ao conteúdo de equações?

Tarefa1 (t1Q1): Apresentar parte introdutória à Equação
--

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

Os autores do LD1 iniciam o capítulo concernente a equação do 2º grau retomando o conteúdo de equações de 1º grau, como pré-requisitos para abordar a ideia de números desconhecidos; através de uma situação-problema, sendo esta a técnica usada pelos autores, em que se apropria de uma abordagem direta sem fazer uso da história da matemática usando uma linguagem natural. Exemplifica usando figuras cotidianas para ilustrar o exemplo dado, fig. 1.

1. Equações



Você já sabe como as equações são úteis na representação e resolução de problemas.

Então, acompanhe a situação a seguir.

Na loja ao lado, um *kit*-presente com duas bermudas e três camisetas custa o mesmo que um *kit*-presente com uma bermuda e duas camisas.

Qual é o preço de uma bermuda?

Com um colega, tentem resolver o problema antes de prosseguir com a leitura. A seguir, leia a resolução que apresentamos. Observe que ela utiliza a álgebra.

Representaremos o preço da bermuda por x .

Duas bermudas e três camisetas custam $2x + 108$.

Uma bermuda e duas camisas custam $x + 190$.

Como os preços dos *kits* são iguais, temos que:

$$2x + 108 = x + 190$$

Subtraindo x de ambos os membros da equação:


$$2x + 108 - x = x + 190 - x$$

$$x + 108 = 190$$

$$x = 190 - 108$$

$$x = 82$$

A bermuda custa R\$ 82,00.



Escrevemos uma equação na incógnita x para representar a situação. Vamos resolver a equação para descobrir o valor de x , que é o preço da bermuda.

Figura 1: Introdução à Equação (LD1, p. 41)

Em LD2 é iniciado a unidade com um breve texto introdutório, todos os capítulos do livro são iniciados assim, sobre as contribuições de vários povos ao desenvolvimento da matemática e a construção da Álgebra e da Geometria. Em seguida o autor do livro traz um fragmento histórico em que é apresentada uma placa de argila com problemas matemáticos deixados pelos babilônios, cuja resolução equivale em uma equação do 2º grau. fig. 2.

Entre os vários documentos que os babilônios deixaram, há um antigo texto de problemas matemáticos, escrito em argila (veja foto abaixo), que apresenta o seguinte problema:

Quanto mede o lado de uma região quadrada se a área dessa região menos a medida do lado é igual a 870?

Passando da linguagem usual para a linguagem algébrica, a solução desse problema equivale a resolver a equação $x^2 - x = 870$, que também pode ser escrita da seguinte forma:

$$x^2 - x - 870 = 0$$

A equação acima, como você já estudou anteriormente, é chamada de equação do 2º grau, e os babilônios foram um dos primeiros povos a registrar e resolver situações que envolvessem equações desse tipo.

Esse é o assunto que você vai estudar agora. Neste capítulo, você vai aprender a resolver situações em que aparecem equações ou sistemas com equações do 2º grau.

Placa de argila 13 901, guardada no Museu Britânico, em Londres, Inglaterra. O primeiro problema dessa placa, registrado em escrita cuneliforme, corresponde ao problema citado no texto.


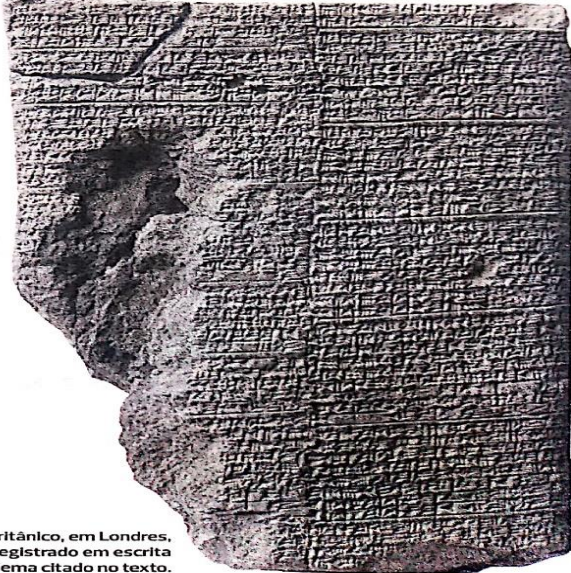



Figura 2: Introdução à Equação (LD2, p. 31)

Percebe-se que os materiais (LD1, LD2) tem maneiras distintas para iniciar o capítulo sugerido às equações do 2º grau. O modo como um conteúdo é colocado influencia na familiarização e entendimento do estudante e conseqüentemente diz muito do seu desempenho durante o desenvolvimento do assunto abordado. Desta forma vale mencionar o quão importante é apresentar aspectos históricos da matemática nos conteúdos curriculares, uma vez que a história da Matemática pode contribuir para o ensino dos conteúdos matemáticos curriculares. Assim, os PCNs enfatizam que:

A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área de conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (BRASIL, 2001. P. 42).

De fato, a história da matemática proporciona meios de contextualização dos saberes matemáticos e também os não matemáticos, mostrando que esses conceitos são frutos de processos históricos que fizeram parte de um contexto sociocultural. Em particular o objeto equações tem grande envolvimento com a História da Matemática. De modo geral, os discentes se interessam pela história dos objetos expostos a eles. Podemos destacar que nos dois materiais analisados são encontradas conexões dos conteúdos com aspectos históricos da matemática, porém, na introdução deste conteúdo em questão só é contemplado no material LD2.

4.2.2. Quadro 9: Conceitos trabalhados antes do uso de fórmulas

Questão 2 (Q2): Como os conceitos matemáticos que antecedem o estudo do uso de fórmulas são apresentados?
Tarefa 1 (t1Q2): Identificar quais conceitos são trabalhados precedentes ao estudo do uso de fórmulas

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

Analisamos nos livros didáticos selecionados os conteúdos expostos no capítulo sobre equações do 2º grau que antecedem o estudo do uso de fórmulas e como esses conceitos matemáticos são apresentados, levando em conta as especificidades metodológicas de um material para outro contemplando a tarefa (t1Q2). Informamos no quadro a seguir os tópicos apresentados anterior ao uso de fórmulas nesses materiais didáticos.

Quadro 10: Conceitos abordados que antecedem o estudo do uso de fórmulas (t1Q2)

Conteúdos de equação abordados nos Materiais Didáticos						
	A	B	C	D	E	F
LD1	Equações (1º grau)	Grau de uma equação	Resolvendo equações do 2º grau (equações incompletas)	Forma geral de uma equação do 2º grau	Trinômios quadrados perfeitos e equações do 2º grau	
LD2	Grau de uma equação com uma incógnita	Reconhecendo uma equação do 2º grau com uma incógnita e seus elementos	Raízes ou soluções de uma equação do 2º grau	Resolução de equações incompletas do 2º grau com uma incógnita	Resolução de equações do 2º grau completas (cujo primeiro membro é quadrado perfeito)	Método de completar quadrados

*No quadro acima, as palavras que estão entre parênteses são interpretações dos autores acerca do tópico.

De acordo com o quadro acima, percebemos que o LD2 trabalha de forma mais compassada, apresentando os conceitos primordiais que antecedem a introdução da fórmula. Isso é essencial para que o estudante construa uma aprendizagem sólida.

4.2.3. Quadro 11: Abordagem usada na descrição de conceitos

Questão 2 (Q2): Como os conceitos matemáticos que antecedem o estudo do uso de fórmulas são apresentados?
--

Tarefa 2 (t2Q2): Identificar as abordagens utilizadas para descrever esses conceitos

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

A retomada do conceito de equação do 1º grau é apresentado somente no material LD1, apropriando-se da técnica resolução de situações problemas para mostrar como as equações são favoráveis na representação e resolução de problemas, com o objetivo de relembrar o conceito da equação.

A abordagem sobre o *grau de uma equação* é contemplada em ambos os livros (LD1 e LD2). Os materiais apresentam exemplos identificando as equações do 2º grau e também são encontrados exercícios que solicitam ao aluno identificar as equações do 2º grau. Vale destacar que na atividade do LD1, além dessas questões é indicada uma equação que os autores solicitam para o estudante encontrar sua solução e apontar as alternativas corretas, só que até então o livro não apresenta meios para que o aluno tenha condições de resolvê-la, uma vez que ainda não é apresentada formas de resolução. O primeiro material não exhibe explicitamente o conceito de equação como é encontrado em LD2, em que é apresentado o conceito de equação em linguagem natural.

<i>Você já viu: equação é toda igualdade que contém letras que representam números desconhecidos, chamados de incógnitas.</i>

Figura 3: Conceito de equação apresentado em LD2, p. 32

No tópico seguinte a abordagem sobre o grau de uma equação os materiais selecionados apontam divergências quanto a maneira como é apresentado o conceito de equação do 2º grau. Em LD2, o autor utiliza a técnica de resolução de situação problema apoiando-se da geometria para expressar o exemplo proposto. O conceito da equação é apresentado em linguagem natural e algébrica. Essas expressões podem ser acompanhadas na figura abaixo. Neste mesmo tópico que os autores apresentam a forma geral de uma equação do 2º grau.

Toda equação com uma incógnita que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, é chamada de equação do 2º grau.

Figura 4: Apresentação do conceito de equação do 2º grau (LD2, p.33)

Já em LD1 os autores apresentam resoluções de algumas equações incompletas, ainda sem o uso de fórmulas. São utilizadas as técnicas de resolução de pequenas situações problemas e também problemas envolvendo a geometria fig. 5. Nesta parte do livro percebemos que os autores estimulam o cálculo mental e o raciocínio lógico dedutivo do aluno, onde apresentam situações que os leva a refletirem e analisarem.

2. Num terreno quadrado será construída uma casa que ocupa a área de um retângulo de medidas 8 m por 10 m. Na planta, a medida do lado do terreno está ilegível, mas sabe-se que a área livre ($A_{\text{terreno}} - A_{\text{casa}}$) é de 320 m². Quanto mede o lado do terreno?

A área da casa é $A_{\text{casa}} = 8 \cdot 10 = 80 \text{ m}^2$.
O terreno é quadrado. Representando por x a medida do seu lado:

$$A_{\text{terreno}} = x^2$$

Como $A_{\text{terreno}} - A_{\text{casa}} = 320 \text{ m}^2$, temos:

$$x^2 - 80 = 320$$

$$x^2 = 320 + 80$$

$$x^2 = 400$$

$$x = \pm \sqrt{400}$$

$$x = \pm 20$$

A solução -20 não serve, pois a medida do lado de um terreno não pode ser negativa. Então, o lado do terreno mede 20 m.

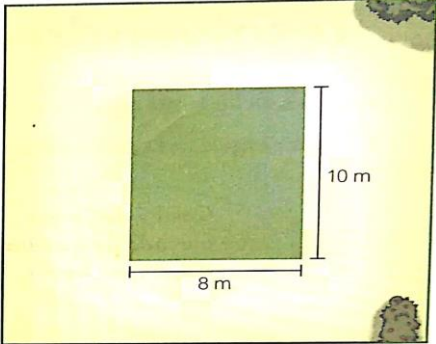


Figura 5: Aplicação de equação do 2º grau em situação problema (LD1, p. 44)

Só no tópico seguinte que os autores (LD1) apresentam essa forma geral num tópico intitulado *Forma geral de uma equação do 2º grau* caracterizando-as e preparando, assim, o estudante para a resolução das equações completas. As técnicas utilizadas pelos autores são linguagem natural com representação algébrica, e aplicação de exemplos resolvidos. Essas definições podem ser acompanhadas no fragmento abaixo retirado do LD1:

Já resolvemos várias equações do 2º grau. Antes de prosseguir estudando outros métodos de resolução, vamos caracterizar essas equações.

Equações do 2º grau na incógnita x têm a seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
, onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

- ♦ a é o coeficiente do termo em x^2 .
- ♦ b é o coeficiente do termo em x .
- ♦ c é chamado de termo independente.

Na equação $4x^2 - 12x + 9 = 0$, temos: $a = 4, b = -12$ e $c = 9$. A incógnita é x .

Na equação $t^2 + 3t + 6 = 0$, temos: $a = 1, b = 3$ e $c = 6$. A incógnita é t .

Se $a = 0$, o termo em x^2 se anula e não temos mais uma equação do 2º grau. Por isso colocamos a condição $a \neq 0$.

Figura 6: Apresentação do conceito de equação do 2º grau (LD1, p. 48)

Podemos destacar que a técnica representação geométrica não é contemplada pelos autores, os quais fazem uso apenas da técnica linguagem algébrica para expressar a forma geral. Essas duas técnicas são contempladas em LD2, como acompanhamos anteriormente.

Neste mesmo item é tratado rapidamente os conceitos de equações do 2º grau incompletas sem muito aprofundamento, como é explícito em LD2 que trata cada caso em um sub tópico. Ainda neste tópico do LD1 os autores apresentam uma gravura retirada do livro História da Matemática expondo as contribuições de François Viète ao desenvolvimento da Álgebra. Esses fragmentos trazendo aspectos históricos da matemática no decorrer do capítulo são contempladas nos dois livros.

Resolver uma equação é encontrar as suas raízes ou soluções. No material LD2 no tópico intitulado *Raízes ou soluções de uma equação do 2º grau* o autor traz o conceito de raiz ou solução utilizando linguagem natural, este assunto não é encontrado em LD1. O recurso didático apropria-se de exemplos de equações apresentando as suas soluções ou raízes para o estudante substituir os valores por x e verificar se os números tornam a sentença verdadeira de uma equação dada. Porém, ainda não é realizada a resolução da equação, apenas apresenta os valores para a substituição e verificação dos mesmos.

Raiz ou solução de uma equação com uma incógnita é o valor que, atribuído à incógnita, torna a sentença matemática verdadeira.

Figura 7: Conceito de raiz ou solução de uma equação (LD2, p. 35)

Em seguida o autor (LD2) propõe o estudo sobre *Resolução de equações incompletas do 2º grau com uma incógnita* no qual é apresentado os três casos de equações incompletas, em que cada caso é explicitado em um sub tópico específico. O autor utiliza uma abordagem algébrica para expressar os exemplos para explicar esses tipos de equações.

Os dois materiais abordam com grande ênfase sobre a resolução de equações do 2º grau por meio dos trinômios. Em LD1 este tópico é intitulado *Trinômios quadrados perfeitos e equação do 2º grau*, onde os autores recordam o conceito de trinômio quadrado perfeito utilizando uma representação geométrica de um trinômio quadrado perfeito para propor a resolução de equações do 2º grau pela fatoração desse trinômio. Aplicam o método de completar quadrados para formar um trinômio na resolução de equações de 2º grau, o autor enfatiza que o produto notável apresentado essas igualdades podem ser encontradas também aplicando a propriedade distributiva a partir da forma fatorada.

A área da figura ao lado pode ser escrita como:

$$A = (a + b)^2, \text{ ou:}$$

$$A = a^2 + 2ab + b^2$$

Polinômio com três termos: trinômio.

a^2 : área do quadrado de lado a .
 $2ab$: 2 vezes a área do retângulo de lados a e b .
 b^2 : área do quadrado de lado b .
 Ou seja, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Lembrei!
 Nós já aprendemos isso.
 Também vimos que
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Essas igualdades também podem ser obtidas se lembrarmos que:
 $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
 Aplicando a propriedade distributiva,
 $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 De forma semelhante, mostre em seu caderno que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Figura 8: Aplicação do conceito de trinômio quadrado perfeito (LD1, p. 49)

A fatoração do trinômio quadrado perfeito possibilita que o aluno compreenda com mais facilidade como se chega a fórmula geral da resolução das equações do 2º grau.

Esse conceito é abordado em LD2, no tópico denominado *Resolução de equações do 2º grau completas* cujo primeiro membro é um quadrado perfeito. O autor do material apresenta alguns exemplos resolvidos para abordar sobre o que é um trinômio quadrado perfeito, e também lança mão de exercícios para os alunos. Posteriormente o livro apresenta o *Método de completar quadrados* onde também apresenta exemplos referente ao assunto. O autor usa a

técnica de interpretação geométrica para representar e exemplificar o método de completar quadrados, com a intenção de facilitar a compreensão do estudante.

Veja o que podemos fazer na equação $x^2 + 6x - 7 = 0$:


$$x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = +7 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 17 + 9$$

↑
↑
↑
 quadrado de x $2 \cdot x \cdot 3$ quadrado de 3

$x^2 + 6x - 7$ não é trinômio quadrado perfeito.
 Para obter um trinômio quadrado perfeito, foi somado 9 a $x^2 + 6x$.
 Para manter a igualdade, foi somado 9 também a $+7$.

Observe a interpretação geométrica desse "completamento de quadrado":

Observe que falta algo para completar o quadrado.



Completamos o quadrado juntando 9 regiões quadradas de área 1 e encontramos um quadrado perfeito.

$x^2 + 6x$

	x	1	1	1
x	x^2	x	x	x
1	x			
1	x			
1	x			

→

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

	x	1	1	1
x	x^2	x	x	x
1	x	1	1	1
1	x	1	1	1
1	x	1	1	1

Figura 9: Apresentação do Método de completar quadrados (LD2, p. 42)

4.2.4. Quadro 12: Abordagem sobre propriedade, teorema, demonstração e prova

Questão 3 (Q3): Na introdução aos conceitos que antecedem o Estudo da Equação são utilizados os termos propriedade, teorema, demonstração, prova, ou mesmo é feita alguma diferenciação entre eles?

Tarefa 1 (t1Q3): Identificar a utilização dos termos nas tarefas executadas e propostas.

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

Posto que o nosso interesse maior é relacionado ao estudo da equação do 2º grau em específico, no entanto verificamos os conteúdos que precedem a este na organização do livro didático. Pois assim teremos uma visão geral de como os autores trabalham os conceitos nesses materiais.

Em ambos os materiais a unidade I antecedente ao capítulo sobre equações é concernente a Potenciação e radiciação. O termo *propriedade* é utilizado com frequência nesta

unidade em LD1 para expressar a propriedade das potências. Na qual é explicado cada uma delas empregando exemplos resolvidos em linguagem numérica e algébrica. Em LD2 não é tratado sobre as propriedades da potência.

Em seguida, em LD1, também é referido a esse mesmo termo sobre a propriedade dos expoentes racionais, embora se trata deste termo, porém, os autores não deixam explícito que se refere a esse termo. Essa propriedade explica a relação entre a potenciação e a radiciação, e como uma potência pode ser representada por raiz, e vice-versa. Este mesmo conceito também é abordado em LD2, no entanto o autor deste livro tem formas divergentes de introduzir esses conceitos, pois neste é apresentado exemplos e posteriormente é trago a propriedade. Já em LD1 primeiro é exposto a propriedade e depois é desenvolvido exemplos sobre.

Em seguida os autores do LD1 apresentam as quatro *propriedades dos radicais*. Cujas 1ª propriedade enfoca se a raiz enésima de um número elevado à enésima potência é o próprio número. Nas palavras dos autores do livro “se a é um número positivo e n é um número natural diferente de zero, $\sqrt[n]{a^n} = a$ ” (LD1, p. 19). Referente a 1ª propriedade os autores apresentam uma tarefa resolvida para exemplificar o conceito abordado apresentando em linguagem algébrica. Este conceito não é abordado em LD2.

Na 2ª propriedade não é contemplada a técnica por meio da representação algébrica, somente é utilizada a linguagem natural com representação numérica. Ressalta que “quando multiplicamos ou dividimos o índice da raiz e o expoente do radicando pelo mesmo número natural diferente de zero, obtemos um radical equivalente ao primeiro” (LD1, p. 20). Este conceito não é encontrado em LD2.

Na propriedade seguinte é concernente a raízes em que o radicando é o produto entre dois números, ou seja, a raiz do produto é igual ao produto das raízes. Para expressar, os autores contemplam a técnica representação algébrica e numérica, e em linguagem natural.

Essa mesma propriedade é desenvolvida em LD2, porém é apresentada de forma mais detalhada. Em que o autor inicia abordando sobre as propriedades das raízes quadradas, depois acrescenta que essa propriedade também vale para raízes cúbicas, raízes quartas, raízes quintas e assim sucessivamente, para raízes enésimas. Observamos que o LD1 apresenta essa propriedade apenas usando o termo para raízes enésimas.

A 4ª propriedade é idêntica à anterior, mas se aplica a divisão de dois números quaisquer. Neste caso, a raiz enésima da razão é igual a razão entre as raízes enésimas. Este conceito é encontrado em ambos os materiais observados. Os autores também utilizam a técnica representação algébrica para expor essa propriedade nos dois livros.

Em exercício proposto podemos encontrar tarefas que solicitam que seja usado as propriedades da multiplicação e da divisão de radicais, e em LD1 também é colocado o uso das propriedades. Além da observação desses termos neste primeiro capítulo, é interessante trazermos esses termos encontrados na unidade referente a equações.

Na introdução ao tópico sobre trinômios quadrados perfeitos (LD1) os autores mencionam o termo propriedade para expressar a propriedade distributiva de um produto notável o quadrado da soma de dois termos. Os produtos notáveis facilitam os cálculos e reduz o tempo de resolução tendo mais caminhos coincidentes a solução final.

As raízes resultantes das operações das equações do 2º grau dependem do valor do discriminante. Deste modo, nos dois materiais (LD1 e LD2) são expostos um quadro destacado em outra cor para apresentar as propriedades da equação. Porém, em LD2 apresenta essa propriedade no sub tópico pertencente ao discriminante, já em LD1 não é tratado sobre este tópico específico, mas sim essa propriedade é trabalhada na introdução da fórmula.

4.2.5. Quadro 13: Abordagem sobre propriedade, teorema, demonstração e prova usando método

Questão 3 (Q3): Na introdução aos conceitos que antecedem o Estudo da Equação são utilizados os termos propriedade, teorema, demonstração, prova, ou mesmo é feita alguma diferenciação entre eles?
--

Tarefa 2 (t2Q3): Identificar se é apresentada alguma diferenciação entre os termos utilizados pelo método axiomático-dedutivo
--

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

Ao analisarmos a tarefa (t2Q3) nos livros selecionados não encontramos nenhuma diferenciação entre os termos utilizados.

4.2.6. Quadro 14: Abordagem sobre demonstração e prova

Questão 4 (Q4): As tarefas propostas, voltadas ao estudo da Equação apresentam demonstrações ou provas?
--

Tarefa 1 (t1Q4): Identificar as tarefas propostas para o estudo da Equação

Tarefa 2 (t2Q4): Identificar, por meio das tarefas, a utilização de provas ou demonstrações
--

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

No material didático LD1 analisando as tarefas (t1Q4) e (t1Q2) no capítulo concernente a equações do 2º grau, observamos que os autores no decorrer do capítulo utilizam o termo *verificar* para representar o termo prova. No início do capítulo os autores usam esse termo ao

introduzir o conteúdo de equações com o intuito de provar se a solução de um exemplo de equação do 1º grau está correta tornando a igualdade verdadeira.

Em outro momento os autores deste livro utilizam este mesmo termo ao retomar a fatoração do trinômio quadrado perfeito aplicando em um exemplo resolvido de equações do 2º grau, que por fim é solicitado que o aluno faça essa verificação. A questão 2 do refletindo possibilita examinar se os estudantes compreenderam a resolução de equações do 2º grau pelo método de completar quadrados. Os autores solicitam que o aluno verifique se a equação é um trinômio quadrado perfeito.

2. Verifique se $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ é um trinômio quadrado perfeito e, se for, escreva sua forma fatorada.

Figura 10: Utilização do termo *verifique...* (LD1, p. 50)

Para introduzir a fórmula geral da equação do 2º grau os autores de ambos os materiais didáticos (LD1 e LD2) demonstram a fórmula de Bháskara por meio do método de completar quadrados. Podemos considerar de suma importância realizar a *demonstração* da fórmula aos alunos, pois assim eles podem compreender como essa fórmula é constituída. Porém a interpretação geométrica da fórmula geral é usada somente pelo LD1, que podem ser observadas nas figuras 11 e 12 abaixo.

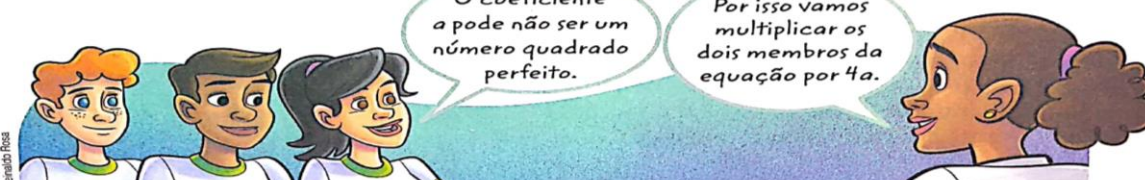
Há uma fórmula que permite resolver equações do 2º grau. Vamos obtê-la a partir do método de completar quadrados.

Partiremos da equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Nosso objetivo é obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação.

O coeficiente
a pode não ser um
número quadrado
perfeito.

Por isso vamos
multiplicar os
dois membros da
equação por 4a.



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Observe a figura ao lado. O terceiro termo do trinômio deve ser b^2 .
Vamos somar b^2 a ambos os membros da equação:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

Para que no primeiro membro da equação fique somente o trinômio quadrado perfeito, vamos subtrair $4ac$ de ambos os membros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Fatorando o trinômio quadrado perfeito, obtemos:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

A expressão $b^2 - 4ac$ será representada pela letra grega Δ (delta).
Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$ na equação acima, temos:

$$(2ax + b)^2 = \Delta$$

Supondo $\Delta > 0$ vem:

$$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$$

Subtraindo b de ambos os membros da equação:

$$2ax = -b \pm \sqrt{\Delta}$$

e, finalmente, dividindo ambos os membros por $2a$ para encontrar x :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

	$2ax$	b
$2ax$	$4a^2x^2$	$2abx$
b	$2abx$	b^2

Figura 11: *Demonstração* da fórmula geral da equação do 2º grau (LD1, p. 54)

Generalizando a ideia de completamento de quadrado, podemos chegar a uma fórmula para resolver equações do 2º grau.

Consideremos a equação genérica do 2º grau com coeficientes **a**, **b** e **c**, com $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividindo ambos os membros por **a**, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completamos o quadrado do primeiro membro somando $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

quadrado de x quadrado de $\frac{b}{2a}$
 $2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$

Fatorando o trinômio quadrado perfeito, obtemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extraindo a raiz quadrada:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, obtemos a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Podemos indicar o valor da expressão $b^2 - 4ac$ pela letra grega Δ (delta). Assim:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Substituindo na fórmula da resolução de equações do 2º grau, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Como partimos da equação do 2º grau na forma geral, a fórmula, que é chamada de fórmula de Bháskara, vale para qualquer equação do 2º grau. Ela permite calcular o valor de **x** utilizando os coeficientes **a**, **b** e **c**.



Figura 12: Demonstração da fórmula geral da equação do 2º grau (LD2, p. 44)

Em LD1 é apresentado um tópico sobre a propriedade da soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau. O autor inicia com uma abordagem executando uma demonstração pela fórmula geral. Entretanto, a soma e o produto das raízes de algumas equações do 2º grau obedecem ao padrão $S = -b/a$ e $P = c/a$, se $a = 1$ a equação pode ser escrita como $x^2 - Sx + P = 0$. Observamos que apesar de se tratar de uma demonstração os autores do livro não deixa claro que se refere a uma demonstração.

Pela fórmula geral, as raízes de uma equação do 2º grau são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \text{ Então:}$$

se anulam

$$\diamond x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \quad \text{Finalmente: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\diamond x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{(-b + \sqrt{\Delta}) \cdot (-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}. \quad \text{Finalmente: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Figura 13: Demonstração da fórmula da soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau (LD1, p. 62)

Chamando de S a soma e de P o produto das raízes de uma equação do 2º grau que tenha raízes reais, temos:

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad P = \frac{c}{a}$$

Se tivermos $a = 1$, a equação pode ser escrita como $x^2 - Sx + P = 0$.

Na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, temos $a = 1$.
Então:

$$S = 5$$

$$P = 6$$

Quais são os números cuja soma é 5 e o produto é 6?

2 e 3, é claro!
As raízes da equação são $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

Ilustração: Renaldo Barata

Figura 14: Continuação da demonstração anterior (LD1, p. 63)

A demonstração da soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau também é realizada no material LD2, contemplando a tarefa (t1Q4) com o objetivo de provar as relações das equações do 2º grau com as suas raízes reais. Levando em conta que há dois casos dessas relações que são a soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau, fig. 15. Vale destacar que neste material é desenvolvida apenas a demonstração do produto das raízes, sendo que a soma das raízes é solicitada para que o aluno a realize como exercício proposto (exercício 48). A intenção do autor é proporcionar que o aluno também faça parte deste processo de demonstração, o que poderá gerar uma melhor compreensão e conseqüentemente um aprendizado significativo.

Demonstrações

Nos exemplos analisados na página anterior, duas relações entre coeficientes e raízes repetiram-se:

- 1ª) a soma das raízes foi igual ao quociente do oposto de **b** por **a**, ou seja:

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

- 2ª) o produto das raízes foi igual ao quociente de **c** por **a**, ou seja:

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Acompanhe a demonstração da 2ª relação (o produto das raízes é $\frac{c}{a}$, ou seja, $P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$).

$$\begin{aligned} P = x' \cdot x'' &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4}ac}{\cancel{4}a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Portanto, $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$.

Para **provar** que essas relações **valem para todas** as equações do 2º grau com raízes reais, devemos usar a equação geral $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Seus coeficientes são **a**, **b** e **c**; suas raízes são

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$



Figura 15: Demonstração da fórmula da soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau (LD2, p.52)

O LD2 também usa o termo *verificar* ao referir-se sobre o termo *prova*. No capítulo concernente a equações do 2º grau, é encontrado esse termo em exercícios para resolver em que o autor expõe as raízes e pede aos estudantes para verificar se são raízes das equações dadas.

Ainda neste mesmo material (LD2) observamos entre os exercícios propostos no capítulo concernente a equações do 2º grau as tarefas identificadas nas atividades propostas como *verifique...*, encontramos duas questões (8 e 11) a presença deste termo, fig. 16 e 17 a seguir. Em que o autor apresenta as raízes e a equação exigindo que o estudante além de resolver necessita que seja realizada uma análise em relação ao resultado encontrado, se este é ou não a solução correta da questão. Observa-se que os dois livros didáticos usam em proporções iguais os termos *provas* ou *demonstrações*.

8. Verifique e responda.

a) 2 é raiz da equação $t^2 - 2t + 1 = 0$?

b) Existe raiz real da equação $y^2 + 9 = 0$?

c) $\frac{4}{5}$ é raiz da equação $5x^2 = 8x - \frac{16}{5}$?

d) -4 e 4 são raízes da equação $p^2 = 16$?

Figura 16: Utilização do termo *verifique...* (LD2, p. 35)

11. Verifique se $x = 3$ e $x = \sqrt{5}$ são as raízes da equação $x^2 - (3 + \sqrt{5})x + 3\sqrt{5} = 0$.

Figura 17: Utilização do termo *verifique...* (LD2, p. 35)

4.2.7. Quadro 15: Finalidades das tarefas e sua relação com o campo

Questão 5 (Q5): Quais as finalidades das tarefas propostas sobre equações do 2º grau, nos livros didáticos de matemática e sua relação com as práticas sociais do campo?
Tarefa 1 (t1Q5): Identificar, por meio das tarefas, a relação do ensino de equações às práticas sociais do campo


Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

Os materiais didáticos, no capítulo concernentes a equações do 2º grau, não apresentam tarefas voltadas as práticas sociais do campo, pois, os exercícios conduzem o estudo da equação sem uma contextualização significativa com os saberes dos sujeitos do campo. Exceto o LD1 que apresenta apenas uma tarefa que faz diálogo com o contexto cultural do campo exposto na *seção livre* do material, que se trata de uma situação-problema envolvendo aspectos da criação de gado, que é uma característica cultural da comunidade onde a escola está inserida, fig. 18 abaixo:

Ricardo tem uma pequena fazenda onde cria gado. Como não gosta de desperdício, ele reaproveita muitas coisas. Ele precisou trocar a cerca ao redor da fazenda e, no final do serviço, constatou que sobraram 120 metros de tela de arame.

Logo teve uma ideia: usar a sobra para cercar um novo pasto para o gado.

Farei um pasto com 1000 m^2 de área.



Como gosta de Matemática e sabe o quanto esse conhecimento é útil, começou a desenhar retângulos que tivessem 120 m de perímetro, procurando aquele cuja área fosse igual a 1000 m^2 .

Figura 18: Tarefa relacionada com prática sócio cultural do campo (LD1, p. 75)

No entanto, só essa tarefa é considerada pouco para se dizer que o livro dialoga com a realidade cultural das comunidades campesinas. Visto que se torna necessário que o livro proporcione mais tarefas e abordagens trazendo os aspectos culturais do meio rural, pois para isso as escolas do campo precisam de livros didáticos diferenciados das escolas urbanas que leve em consideração a sua realidade.

4.2.8. Quadro 16: Conceitos e Tarefas indispensáveis para o campo nas tarefas

Questão 6 (Q6): Quais conceitos e tarefas propostas para o estudo da Equação do 2º grau são indispensáveis para o ensino e aprendizagem da matemática dos sujeitos do campo?

Tarefa 1 (t1Q): Identificar a utilização de termos ou abordagens nas tarefas em que mostram a utilidade para os sujeitos do campo

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

Os conceitos e tarefas que são indispensáveis para o ensino de equações, do ponto de vista da educação do campo, são as tarefas e conceitos de sistemas de equações por proporcionarem facilitar a contextualização com elementos da realidade cultural dos povos do campo. Respondendo a t1Q6 são encontradas em LD1 um exemplo que traz essa contextualização por meio de sistemas com aspectos da vida rural, o qual foi explanado na Q5, em LD2 não são encontradas tarefas desse tipo.

Analisando os livros como um todo, não só especificamente ao capítulo de equações do 2º grau, percebemos que o LD2 apresenta mais tarefas relacionadas a elementos do contexto

do campo ao longo do material que o LD1. No entanto, não quer dizer que são relacionadas diretamente com o contexto do campo, mas, sim, são exemplos que apresentam uma aproximação dos saberes matemáticos com a realidade dos alunos.

De modo geral os livros didáticos não apresentam um número significativo de tarefas relacionadas ao contexto dos sujeitos do campo. Tendo em vista que esses materiais não foram produzidos especificamente para atender a essa realidade, uma vez que trazem grande número de tarefas e abordagens que estão voltadas a aspectos da vida urbana.

Mediante o exposto anteriormente podemos inferir que as obras analisadas não atendem as diretrizes operacionais para a educação básica nas escolas do campo, conforme o artigo 7º do Parecer CNE/CEB nº 3/2008, onde destaca que a “Educação do Campo deverá oferecer sempre o indispensável apoio pedagógico aos alunos [...] bem como materiais e livros didáticos, equipamentos, laboratórios, bibliotecas e áreas de lazer e desporto, em conformidade com a realidade local e as diversidades dos povos do campo”. Pois, essas diretrizes ressaltam que a educação para os sujeitos do campo deve dialogar com a sua realidade, e nos livros não há de forma significativa essa conexão de saberes.

Observou-se que no geral os dois livros didáticos apresentam organização semelhantes de conteúdos que do ponto de vista didático-metodológico apresentam uma coerência entre as unidades dos conteúdos e que podem proporcionar ao professor uma metodologia cronológica e ao aluno uma melhor aprendizagem. Por exemplo, o LD2 prioriza o ensino espiral, em que um mesmo conceito é retomado várias vezes para melhor sistematização do conhecimento por meio de revisão contínua fazendo com que se concretize o saber. Ambos os livros trabalham os conceitos a partir de uma situação-problema, que na maioria dos casos não se conectam às realidades do campo.

Vale destacar que o LD2 apresenta os conceitos de forma mais clara e de fácil localização, uma vez que os conceitos são destacados em outra cor o que facilita a sua identificação. Já em LD1 não é possível perceber as definições com facilidade.

É importante destacar que nos materiais analisados (LD1 e LD2), não são encontradas propostas de atividades fora do espaço da escola, sendo que aulas externas potencializam a aprendizagem mostrando que os saberes escolares têm relações com os elementos que estão no dia-a-dia dos estudantes, fazendo-os perceber que a matemática faz parte do nosso cotidiano. Contudo, somente as aulas internas restringem o ensino e aprendizagem dos estudantes a situações problemas baseados em eventos fictícios, desfavorecendo o processo educacional e a contextualização de saberes.

4.3. Síntese identificando elementos de uma praxeologia, segundo um objeto matemático

No quadro seguinte, apresentamos uma síntese identificando os elementos de uma organização praxeológica [tarefa (T), técnica (\hat{o}), tecnologia (θ) e teoria (Θ)], segundo a praxeologia do objeto matemático, equação do 2º grau, nos livros didáticos analisados, para exemplificar aplicação da noção de uma análise praxeológica:

Quadro síntese exemplificando a Praxeologia do material didático utilizado pelo professor de matemática para uma das Tarefas sobre resolução de equação 2º Grau		
Elementos de uma organização praxeológica	LD1	LD2
Tarefa (T)	Resolva a equação $x^2 + 3x - 10 = 0$ usando a fórmula geral.	Resolver as raízes da equação $x^2 + 4x - 12 = 0$ pelo método de completar quadrado.
Técnica (\hat{o})	Técnica 1: Identificação dos coeficientes e do termo independente da equação; Técnica 2: Calcula o valor de Δ , Técnica 3: Usa a fórmula para determinar os valores de x.	Técnica 1: insole o termo independente para o outro lado da equação Técnica 2: soma 4 a ambos os membros Técnica 3: fatora o trinômio quadrado perfeito.
Tecnologia (θ)	Fórmula de Bháskara	Método de completar quadrado
Teoria (Θ)	Campo da Aritmética e da Álgebra: operações - adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação. Jogo de sinais.	Campo da Aritmética e da Álgebra: Fatoração e radiciação.

Fonte: quadro construído pelos autores

De acordo com o quadro acima podemos identificar os termos da análise praxeológica adotados pelos autores de ambos os materiais didáticos. Segundo Chevallard (1998), a noção de tarefa é o coração da praxeologia; é a partir delas que podemos ter a ação de fazer as coisas. Em LD1 escolhemos a tarefa (T) “Resolver a equação $x^2 + 3x - 10 = 0$ ” usando a fórmula geral, para resolver essa tarefa os autores do livro apresentam alguns caminhos até encontrar a solução dessa equação, os quais, segundo Chevallard, são chamados de técnica (\hat{o}). A técnica segundo

Chevallard (1998), é como se fosse o jeito de se fazer as coisas/tarefas. Percebemos que o livro disponibiliza de três técnicas: 1) são solicitados que identificamos os coeficientes e o termo independente na equação, 2) calculamos o valor de Δ , e 3) solicita-se que aplicamos a fórmula para determinar os valores de x . Além disso, o livro apresenta a verificação da resposta.

A técnica para a resolução dessa equação é justificada pela fórmula de Bháskara que desempenha papel de tecnologia. Que é um discurso racional sobre a técnica (CHEVALLARD, 1998). Por fim, sendo a teoria um conjunto de conhecimento matemático necessários para estabelecer a tecnologia, ou seja, o teorema de Bháskara são mobilizados saberes sobre as operações básicas da matemática estudados em anos anteriores.

Em LD2 selecionamos uma tarefa que o autor apresenta como exemplo para explicar o método de completar quadrados. O exemplo apresenta uma tarefa do tipo: resolver *as raízes da equação* $x^2 + 4x - 12 = 0$, e para sua resolução apresenta algumas técnicas que são necessárias. Observa-se que a equação não é um trinômio quadrado perfeito, daí é sugerido que insole o termo independente para o outro lado da equação e para que se torne um trinômio o autor solicita que seja somado 4 a ambos os membros, que em seguida é fatorado e encontrado as raízes. O autor disponibiliza também de representação geometria da equação. A tecnologia proposta para a resolução da equação é o método de completar quadrado. E a teoria que justifica a tecnologia adotada é a fatoração e a radiciação, os quais são saberes mobilizados para resolver equações do 2º grau por produtos notáveis.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa se propôs a analisar como autores de livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental organizam as tarefas propostas relativos ao conteúdo equações do 2º grau por meio da Análise Ecológica e a Análise Praxeológica e sinalizar algum entendimento sobre as principais dificuldades apresentadas por estudantes da escola Tomaz Antônio Gonzaga, em relação ao ensino de Álgebra, mais especificamente sobre o conteúdo de equações do 2º grau.

Os resultados obtidos levam a concluir que a maneira como os objetos de ensinados estão organizados em livros didáticos, influenciam diretamente na aprendizagem do estudante. Pois, o livro mobiliza metodologias, determina conteúdos, estabelece estratégias de ensino; segundo a Didática da Matemática são condições e restrições institucionais sobre o que se ensina, como se ensina e para quem se ensina, podendo se constituir em variáveis restritivas para a aprendizagem do objeto a ser ensinado.

Percebemos também que as tarefas propostas nos livros didáticos analisados não se articulam com as práticas socioculturais do campo. O conhecimento escolar não apresenta relação com os saberes socioculturais onde o sujeito está inserido. É necessário questionar o material didático utilizado; pois, na perspectiva da educação do campo o conteúdo de construção do conhecimento não pode ser desarticulado da realidade dos sujeitos.

Para além disso, é fundamental que as organizações didáticas e matemáticas dos materiais utilizados, ofereçam abordagens em que supere a simples técnica de memorização dos conteúdos algébricos. Outro ponto, é o procedimento metodológico utilizado para o ensino desse conteúdo, que na maioria das vezes é seguindo tal como está nos livros didáticos.

Em nosso ponto de vista talvez seja necessária uma melhor capacitação dos professores, inclusive para compreender e refletir sobre as organizações didáticas e matemáticas dos livros didáticos; e a formação do professor deva perpassar pela compreensão dos níveis de abstração da álgebra e o conhecimento algébrico que se objetiva nas tarefas organizadas nos livros.

O processo metodológico de ensino e aprendizagem de conteúdos de matemática tem uma prática frequente em sala de aula que consiste em ensinar um conceito e depois para que o aluno empregue esse conceito é apresentado um problema para que seja resolvido aplicando essas técnicas. Os PCNs têm um posicionamento contrário a essa prática em que apresentam o caminho inverso para a resolução de problemas, por qual, deve expor um problema para que, nas tentativas de resolvê-lo, o aluno aproxima-se do seu conceito que, em seguida, será sistematizado.

Foi possível perceber que a maneira como se são abordados os conceitos algébricos iniciais, influenciam na forma como o aluno familiariza ou não com essa área, pois é a base para a construção de conceitos posteriores. Na qual é possível que a deficiência no ensino e aprendizagem da Álgebra se prolongue caso não seja bem desenvolvidos; constituindo-se um obstáculo à formação de outros conceitos no ensino da Matemática no que gera no aluno, um distanciamento e repúdio a essa disciplina. Compreender esses fenômenos exige um estudo sobre as organizações e tarefas dos objetos matemáticos propostos para o ensino escolar de álgebra. Construtos teóricos da Didática da Matemática, podem nos ajudar a elucidar algumas questões sobre isso, mas, motivando a estudos posteriores.

Constatamos que de um modo geral os livros didáticos analisados sugerem exploração de textos dos fragmentos históricos, direcionando atividades aos alunos. Apresentam também sugestões de como avaliar se os estudantes assimilaram as resoluções das equações por meio de jogos. Abordam algumas atividades como proposta de trabalhar atividades interdisciplinares

envolvendo outras áreas do conhecimento, mas desarticuladas da relação com as práticas sociais do campo.

Foi constatado também que além deste livro *Praticando Matemática* os docentes usam um outro material que se trata de um caderno (caderno do futuro) que contém, de forma bem resumida, os conceitos e exercícios sobre o assunto. Porém, este material não apresenta contextualização dos exemplos e nem interpretações geométricas, funcionando apenas como um apoio com as atividades.

Os professores de matemática da escola utilizam o livro didático como um dos principais recursos no ensino de equações do 2º grau, isso não é condenável. Mas, sendo o livro o principal interlocutor entre o aluno, o saber e o professor é preciso compreender as organizações praxeológicas. Sugerimos algumas questões que podem ser feitas para nos ajudar a refletir se essa organização praxeológica se relaciona com o campo: 1) a obra aborda com clareza e coerência teórico-metodológica a diversidade da experiência humana e a pluralidade social, respeitando, reconhecendo e valorizando os saberes do campo? 2) as tarefas e técnicas contribuem para a apreensão das relações que se estabelecem suas funções socioculturais do campo? 3) as tarefas contribuem para a compreensão de conceitos, informações e procedimentos correlatos ao contexto do campo? 4) apresenta atividades, ilustrações e imagens referentes aos povos do campo?

Esperamos, portanto, que os resultados desse estudo contribuam para os professores, no sentido de proporcioná-lo perceber como as tarefas estão expostas nos livros, para assim tentar utilizar os livros didáticos, e de forma complementar, produzir organizações didáticas que se relacionem com o estudo da realidade do campo, sem se desconectar de uma perspectiva ampla sobre realidade.

REFERÊNCIAS

- ANDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. **Praticando Matemática**, 9. - 4. ed. Renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015 – (Coleção praticando matemática; v. 9).
- ARAÚJO, E. A. **Ensino de álgebra e formação de professores**. In: Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331 – 346, 2008.
- BAUMGART, John K. **Álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992, 112p. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, V. 4).
- BRASIL, Base **Nacional Comum Curricular**: Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desparto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, v. 3. Brasília, MEC/SEF, 1997.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008**: Ciências. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2007.
- BRASIL, Parecer nº 3/2008 da CNE/CEB – **Diretrizes Operacionais para a Educação Básica nas Escolas do Campo**. Brasília, DF, 2008.
- BOYER, C. **História da Matemática**. 2. Ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1978.
- CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L’approche anthropologique, 1998. In: BARBOSA, E. J. T.; LINS, A. F. Organização praxeológica: equação do primeiro grau em livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental. EMR – RS – ANO 14 – 2013 – número 14 – v. 1 – p. 29 a 42.
- CHEVALLARD, Y. La Transposition Didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Recherches em Didactique dès Mathématiques. Grenoble, 1991
_____. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L’approche anthropologique. *Actes de l’U.E. de la Rochelle*, 1998.
- DANTE, Luiz Roberto. Projeto Teláris: **Matemática**. 1 ed. – São Paulo: Ática, 2012. – (Projeto Teláris: Matemática).
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuições para um repensar...a educação algébrica elementar**. v. 4, n. 1 Campinas: Pró-Posições, mar. 1993.
- IMENES, L. M. e LELLIS, M. **O currículo tradicional e o problema: um descompasso**. SBEM – Educação Matemática em Revista, v. 2, n. 2. P. 5-12, 1994
- KAPUT, J. **What is algebra? What is algebraic reasoning?** New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.
- LAJOLO, M. **Livro didático: um (quase) manual de usuário**. In: *Em aberto*. Livro didático e qualidade de ensino. Ano 16, nº. 69. Brasília: jan./mar.1996. SEDIAE/INEP.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papyrus, 1997.

LUFT, C. P. **Minidicionário Luft**. ed. 20. São Paulo: Ática, 2000.

ODUM, Eugene P. **Ecologia**, In: FERNANDES, José Augusto Nunes; GUERRA, Renato Borges. A teoria antropológica do didático: Princípios e fundamentos, 1988.

MIGUEL, A., FIORENTINI, D. e MIORIM, Â. **Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?** Pró-Posições, v. 3, n. 1, 1992.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SOARES M. B. Novas práticas de leitura e escrita: letramento na Cibercultura. **Educação e Sociedade**. v. 23, n. 81. dez. 2002.

SOUZA, E. R. de; DINIZ, M. I. de S. V. **Álgebra: das variáveis as equações e funções**. São Paulo: IME-USP. 1994.

VARELLA, Márcia. **Prova e demonstração na geometria analítica: uma análise das organizações didáticas e matemática em materiais didáticos**. 2010, 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

VARIZO, Z. da C. M. O livro didático ontem e hoje. In: **Cadernos de pesquisa do programa de pós-graduação em educação matemática da universidade federal do Espírito Santo**. Vitória: UFES/PPGE, 1999, v. 1, n. 1, p. 125-140.